МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»
Высшая школа электроники и компьютерных наук
Кафедра системного программирования

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ И АНАЛИЗА ЧИСЕЛ, СВЯЗАННЫХ С РАЗБИЕНИЯМИ

Рецензент:
доцент кафедры МиМОМ ФГБАОУ ВО
«ЮУрГГПУ», к.ф.-м.н.
Е.О. Шумакова

Научный руководитель:
профессор кафедры СП, д.ф.-м.н,
доцент
Р.Ж. Алеев

Автор:
студентка группы КЭ-220
К.В. Бастрыкина

Челябинск, 2024 г.

АКТУАЛЬНОСТЬ

Направление	**Применение**
Комбинаторика	Создание новых методов и алгоритмов для решения комбинаторах задач
Машинное обучение	Разработка алгоритмов оптимизации, решение задач классификации и регрессии
Криптография	Построение криптографических протоколов в криптосистемах, основанных на решетке
Теория чисел	Расширение знаний о структуре числовых систем, развитие новых методов анализа чисел

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель

Разработать программную систему для вычисления чисел, связанных с разбиением

Задачи

- Реализовать алгоритм вычисления вектора разбиения
- Реализовать алгоритм вычисления характеристики вектора разбиения
- Реализовать алгоритм вычисления ранга характеристики
- Выполнить поиск самоассоциированных разбиений
- Реализовать систему для изучения чисел, связанных с разбиениями
- Провести анализ, полученных данных

АНАЛИЗ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

- Разбиением натурального числа n называется всякая конечная невозрастающая последовательность натуральных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{m}$, для которой

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = n$$

- Числа λ_i называются частями разбиения
- m – количество частей разбиений
- $m \in [1, n]$
- Разбиения одного числа считается равными, если эти разбиения отличаются порядком слагаемых

ВЕКТОР РАЗБИЕНИЯ

Вектор разбиения – это способ представления разбиения в виде списка, длина которого равна n

ToVector(n, partition)

$m := \mathbf{Length}(partition)$

$\mathbf{for}\ i := 1\ \mathbf{to}\ n - m$

$\varkappa_i := i - 1$

$\mathbf{for}\ i := n - m + 1\ \mathbf{to}\ n$

$\varkappa_i := partition[i - n + m] + i - 1$

$\mathbf{return}\ \varkappa$

количество частей разбиения

Длина вектора разбиения равна длине разбиения

Длина вектора разбиения равна n

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРА РАЗБИЕНИЯ

ToVector(4, [1, 3])

$m := \mathbf{2}$

for $i := 1$ **to** 2

$\varkappa_i := i - 1$

$\varkappa_1 := 0$
$\varkappa_2 := 1$

for $i := 3$ **to** 4

$\varkappa_i := partition[i-2] + i - 1$

$\varkappa_3 := 1 + 3 - 1$
$\varkappa_4 := 3 + 4 - 1$

return $[0, 1, 3, 6]$

Partitions
[1, 1, 1, 1]
[1, 1, 2]
[2, 2]
$\boxed{[1, 3]}$
[4]

ХАРАКТЕРИСТИКА ВЕКТОРА РАЗБИЕНИЯ

По вектору разбиения находится пара чисел a и b. Эта пара называется характеристикой вектора разбиения

Характеристика – двумерный массив

Characteristic(n, vector)

flag := False
for i $\coloneqq$ 1 **to** n
  $n\_1_i := i - 1$
  $n\_x_i \coloneqq n - 1 - \text{vector}[i]$
$a \coloneqq n\_1/(n\_x \cap n\_1)$
$r \coloneqq n - \textbf{Length}(n\_1 \cap \text{vector})$
for i $\coloneqq$ n − r + 1 **to** n
  $b \coloneqq \text{vector}[i] - n$
if a = b **then** flag = True
$\text{characteristic} \coloneqq \big[[\text{Sort}(a)], [\text{Sort}(b)]\big]$
return characteristic, r, flag

r – ранг характеристики
$r \coloneqq \textbf{Lenght}(a)$
$r \coloneqq \textbf{Lenght}(b)$

Если a = b, то это самоассоциированное разбиений

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРА РАЗБИЕНИЯ

Characteristic(4, [0, 1, 3, 6])

flag := False $\boxed{n}$

$\mathbf{for}\ \mathrm{i} \coloneqq 1\ \mathbf{to}\ 4$

$\quad \mathrm{n\_1_i} := \mathrm{i} - 1 \quad \boxed{n-1}$

$\quad \mathrm{n\_x_i} \coloneqq 3 - \mathrm{vector[i]}$

$\mathrm{a} \coloneqq \{0, 1, 2, 3\}/\{0, 2, 3\}$

$\mathrm{r} \coloneqq 4 - 3 \quad \boxed{\boldsymbol{Lenght}(\mathrm{n\_1} \cap \mathrm{vector})}$

$\mathbf{for}\ \mathrm{i} \coloneqq 4 - 1 + 1\ \mathbf{to}\ 4$

$\quad \mathrm{b} \coloneqq 6 - 4$

$\mathbf{if}\ \mathrm{a} = \mathrm{b}\ \mathbf{then}\ \mathrm{flag} = \mathrm{True}$

$\mathrm{characteristic} \coloneqq \left[[\mathrm{Sort(a)}], [\mathrm{Sort(b)}]\right]$

$\mathbf{return}\ \mathrm{characteristic, r, flag}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{n\_1} \coloneqq \{0, 1, 2, 3\} \\ \mathrm{n\_x} \coloneqq \{3, 2, 0, -3\}\end{array}}$$

$$\boxed{\mathrm{n\_x} \cap \mathrm{n\_1} = \{0, 2, 3\}}$$

$$\boxed{a \coloneqq \{1\}}$$

$$\boxed{\mathrm{n\_1} \cap \mathrm{vector} = \{0, 1, 3\}}$$

$$\boxed{b \coloneqq \{2\}}$$

РАНГ ХАРАКТЕРИТИСИКИ РАЗБИЕНИЯ САМОАССОЦИИРОВАННЫЕ РАЗБИЕНИЯ

- **Ранг** характеристики вектора разбиения численно равен половине элементов характеристики вектора разбиения

$$\sum_{i}^{r} a_i + \sum_{i}^{r} b_i = n - r$$

- Свойство ранга $r \leq \sqrt{n}$
- Если $\bar{a} = \bar{b}$, то разбиение является **самоассоциированным**

$n \coloneqq 4$

$a \coloneqq \{1\}$

$b \coloneqq \{2\}$

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И СИСТЕМЫ

- Инструменты работки:

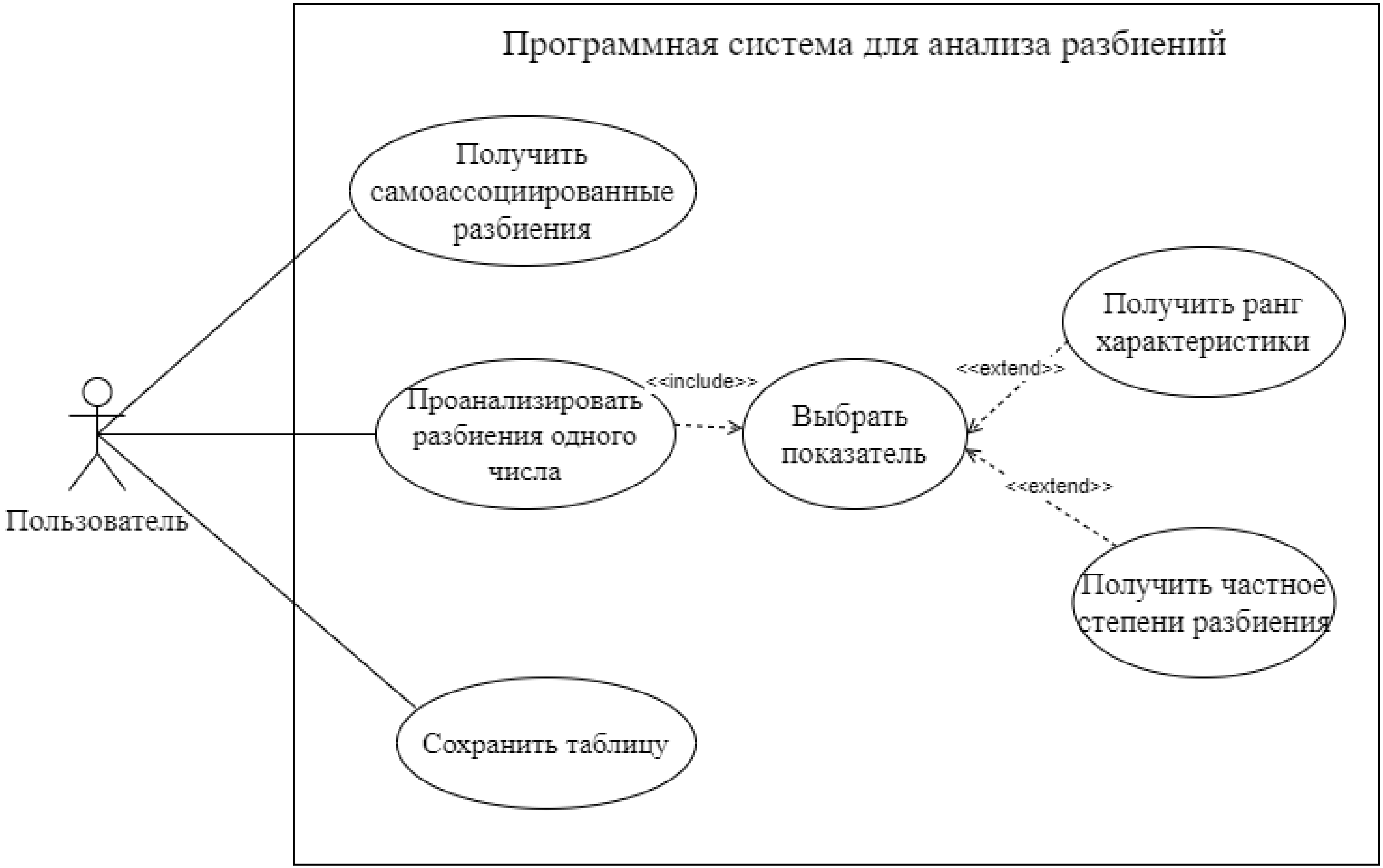
1) GAP 4.12.0 – система компьютерной алгебры;
2) язык Python 3.10.16;
3) Tkinter 8.6 – создание оконного интерфейса;
4) MatPlotLib 3.9.0 – построение графиков;
5) Numpy 1.26.4 – работа с массивами;
6) Pandas 2.2.0 – работа с табличными данными;
7) Scipy 1.13.0 – анализ полученных вычислений.

- На персональном компьютеры были посчитаны все необходимые показатели для $1 \leq n \leq 64$, что составляет более 12млн строк в PandasDataFrame.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ

1. Пользователю доступен ввод натурального числа
2. Пользователю доступен ввод диапазона чисел
3. Система должна делать проверку введенных данных
4. Пользователю доступен выбор: работать с разбиениями одного числа или с самоассоциированными разбиениями
5. Пользователю доступен выбор с каким показателем разбиения работать: с рангом или с частным степени
6. Система должна предоставлять графики и таблицы
7. Пользователь может сохранять табличные данные

ДИАГРАММА ВАРИАНТОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ



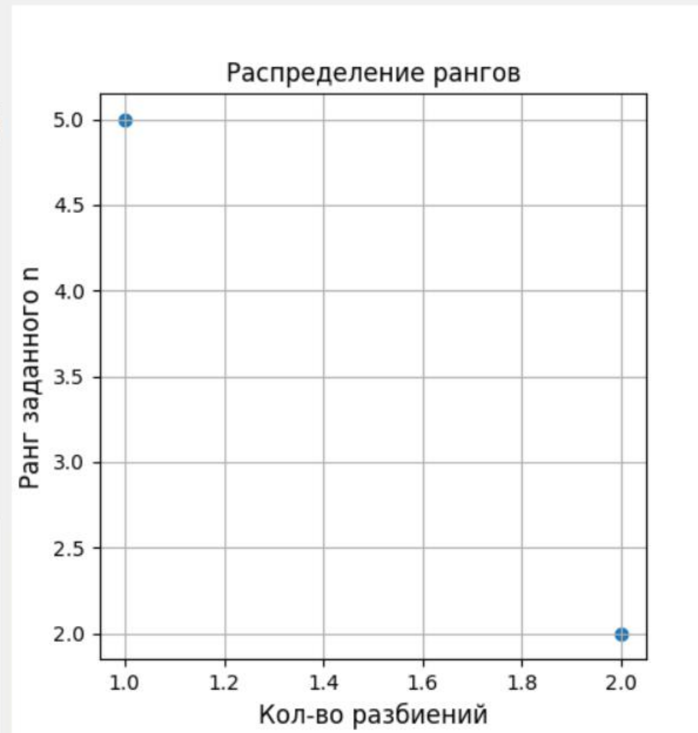
ИНТЕРФЕЙС «РАЗБИЕНИЯ ОДНОГО ЧИСЛА»

Числа, связанные с разбиением

Файл Разбиения одного числа Самоассоциированные разбиения

5 Ранг Получить разбиения

Чис.	Разбиени	Вектор	Ранг	Характер	Частное	Самоассо
5	[5]	[0, 1, 2, 3, 9]	1	[[0], [4]]	1	0
5	[1, 4]	[0, 1, 2, 4, 8]	1	[[1], [3]]	4	0
5	[2, 3]	[0, 1, 2, 5, 7]	2	[[0, 1], [0	5	0
5	[1, 1, 3]	[0, 1, 3, 4, 7]	1	[[2], [2]]	6	1
5	[1, 2, 2]	[0, 1, 3, 5, 6]	2	[[0, 2], [0	5	0
5	[1, 1, 1, 2	[0, 2, 3, 4, 6]	1	[[3], [1]]	4	0
5	[1, 1, 1, 1	[1, 2, 3, 4, 5]	1	[[4], [0]]	1	0



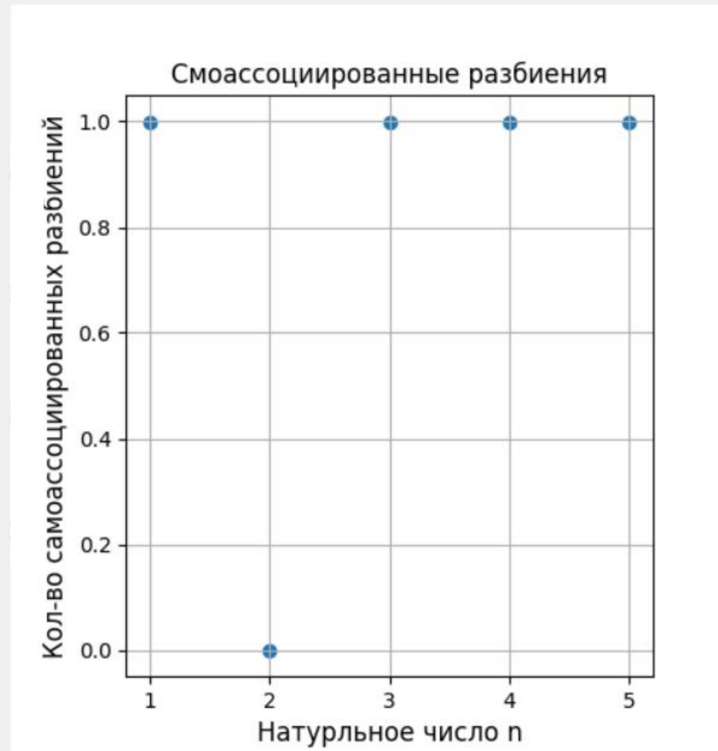
ИНТЕРФЕЙС «САМОАССОЦИИРОВАННЫЕ РАЗБИЕНИЯ»

Числа, связанные с разбиением

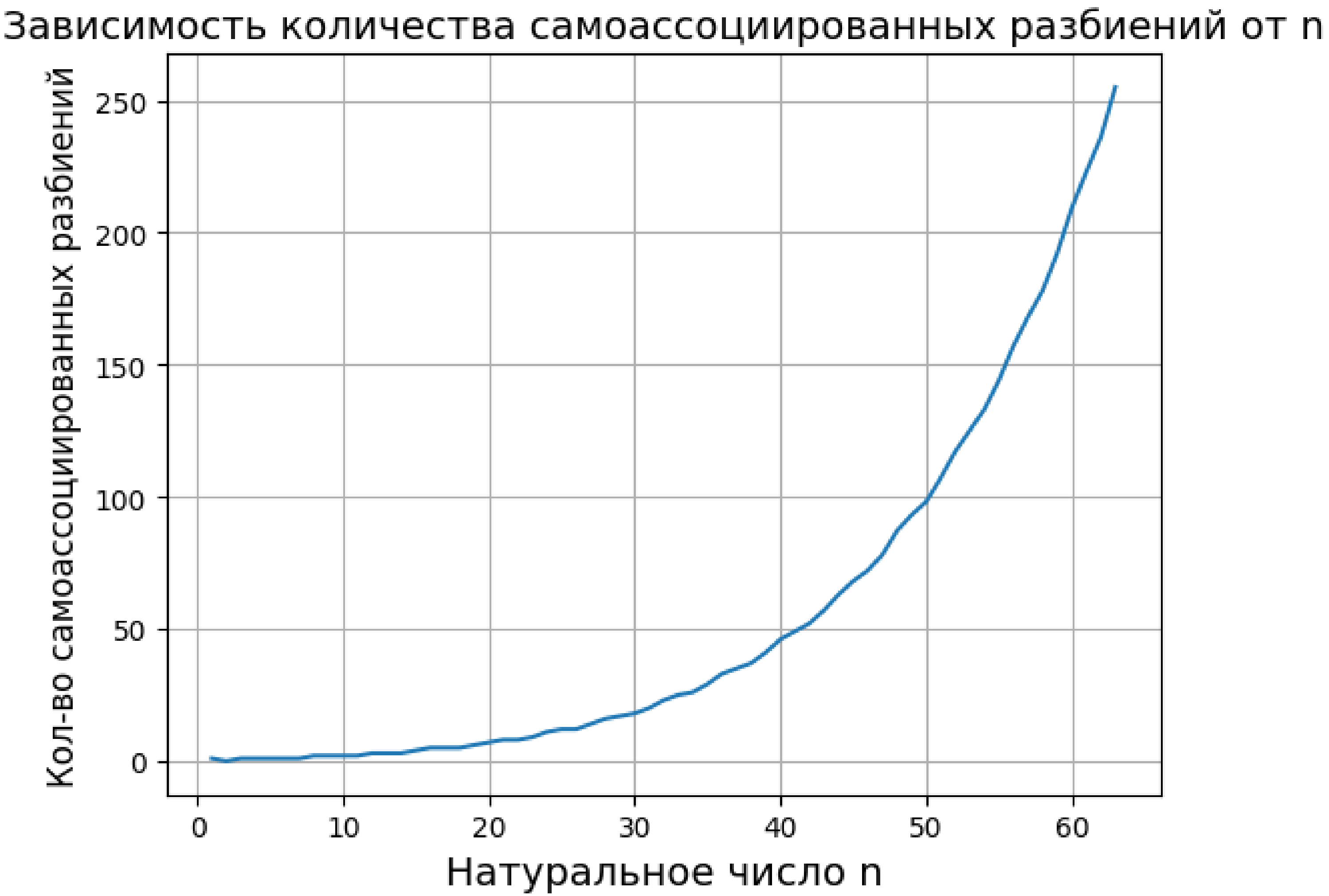
Файл   Разбиения одного числа   Самоассоциированные разбиения

1   5   Получить результаты

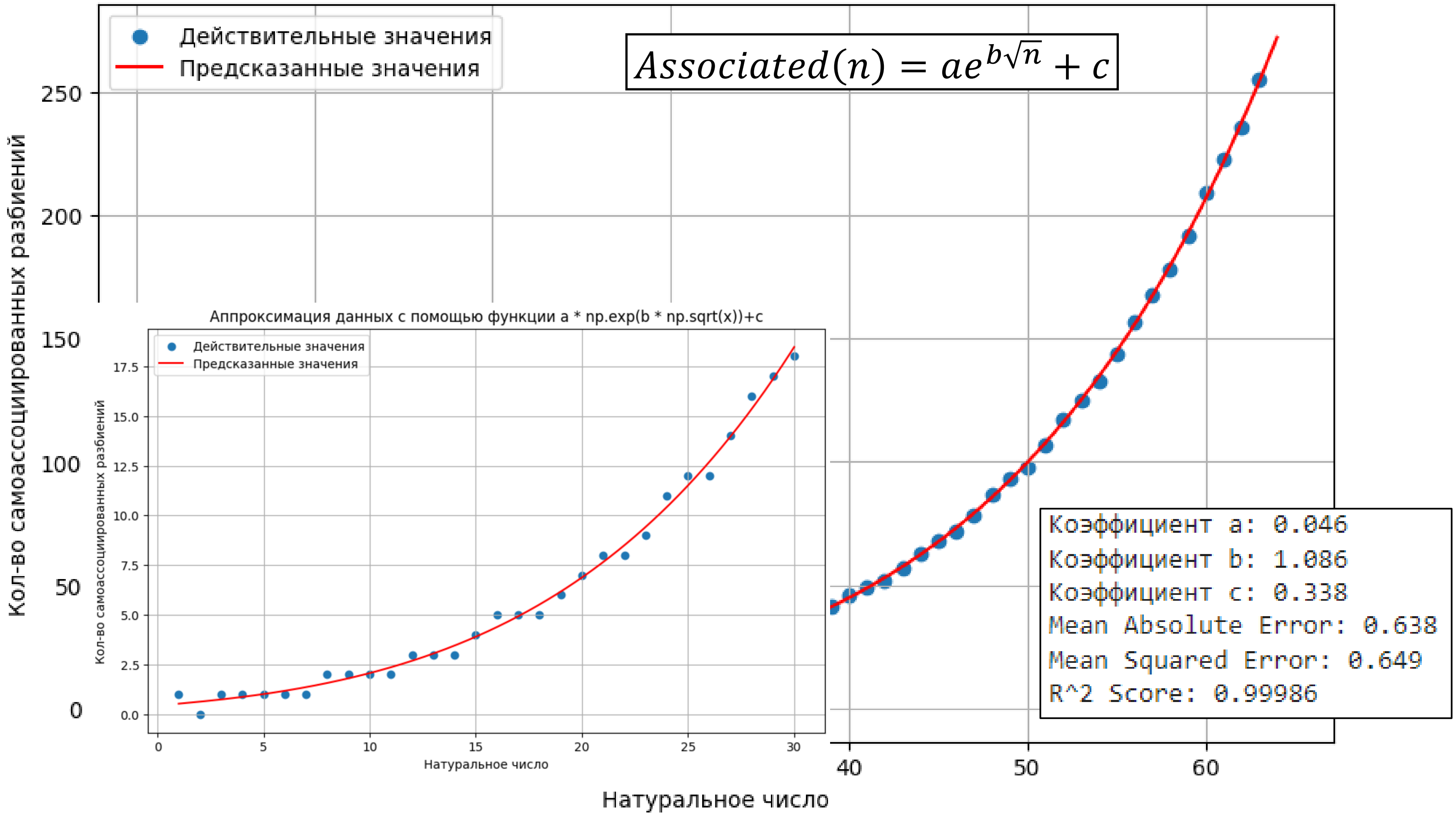
Число	Разбиение	Вектор	Ранг	Характеристи	Частное степени
5	[1, 1, 3]	[0, 1, 3,	1	[[2], [2]]	6 = 2^1 * 3^1
4	[2, 2]	[0, 1, 4,	2	[[0, 1], [0, 1]]	2 = 2^1
3	[1, 2]	[0, 2, 4]	1	[[1], [1]]	2 = 2^1
1	[1]	[1]	1	[[0], [0]]	1

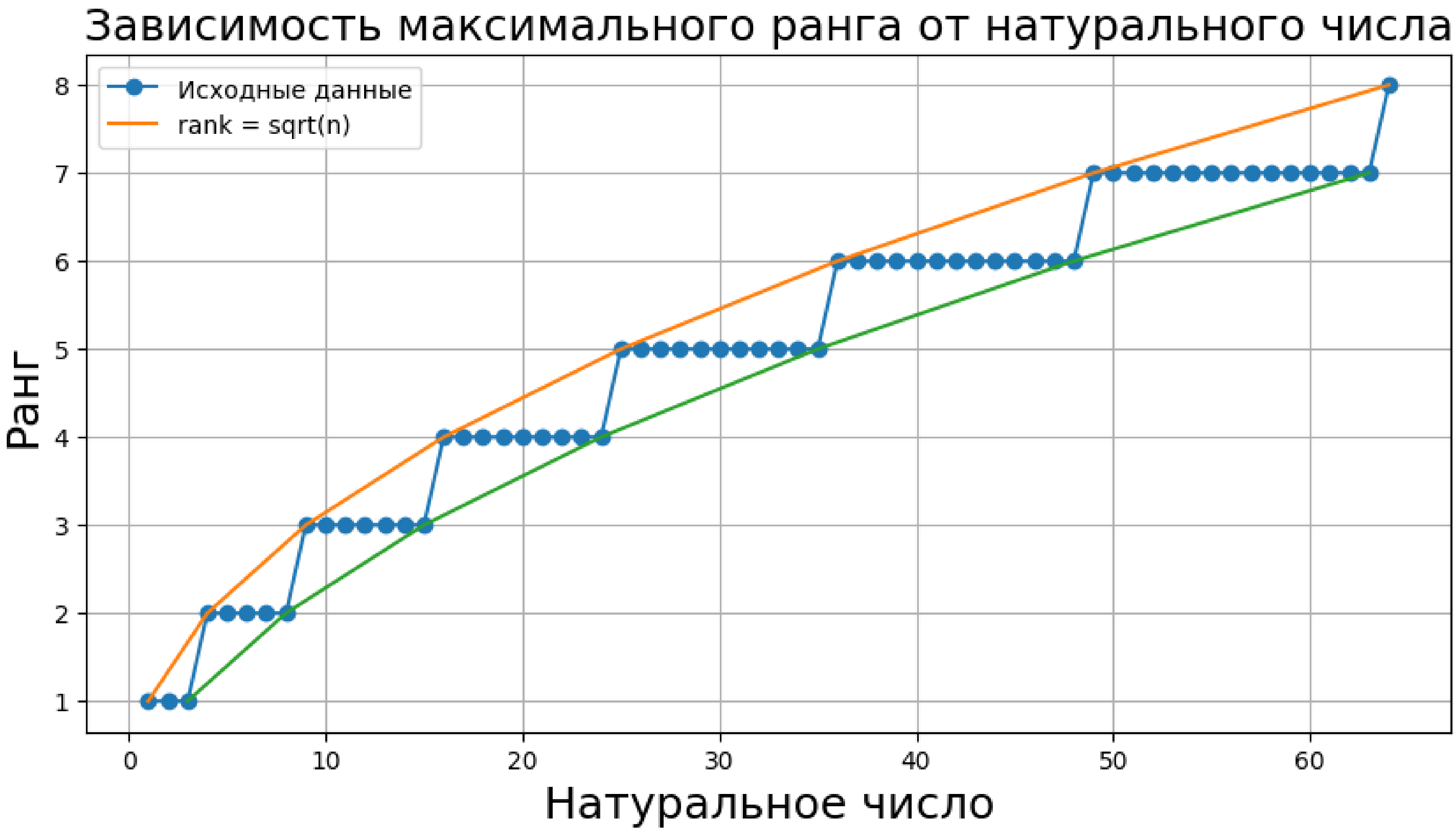


АНАЛИЗ САМОАССОЦИИРОВАННЫХ РАЗБИЕНИЙ

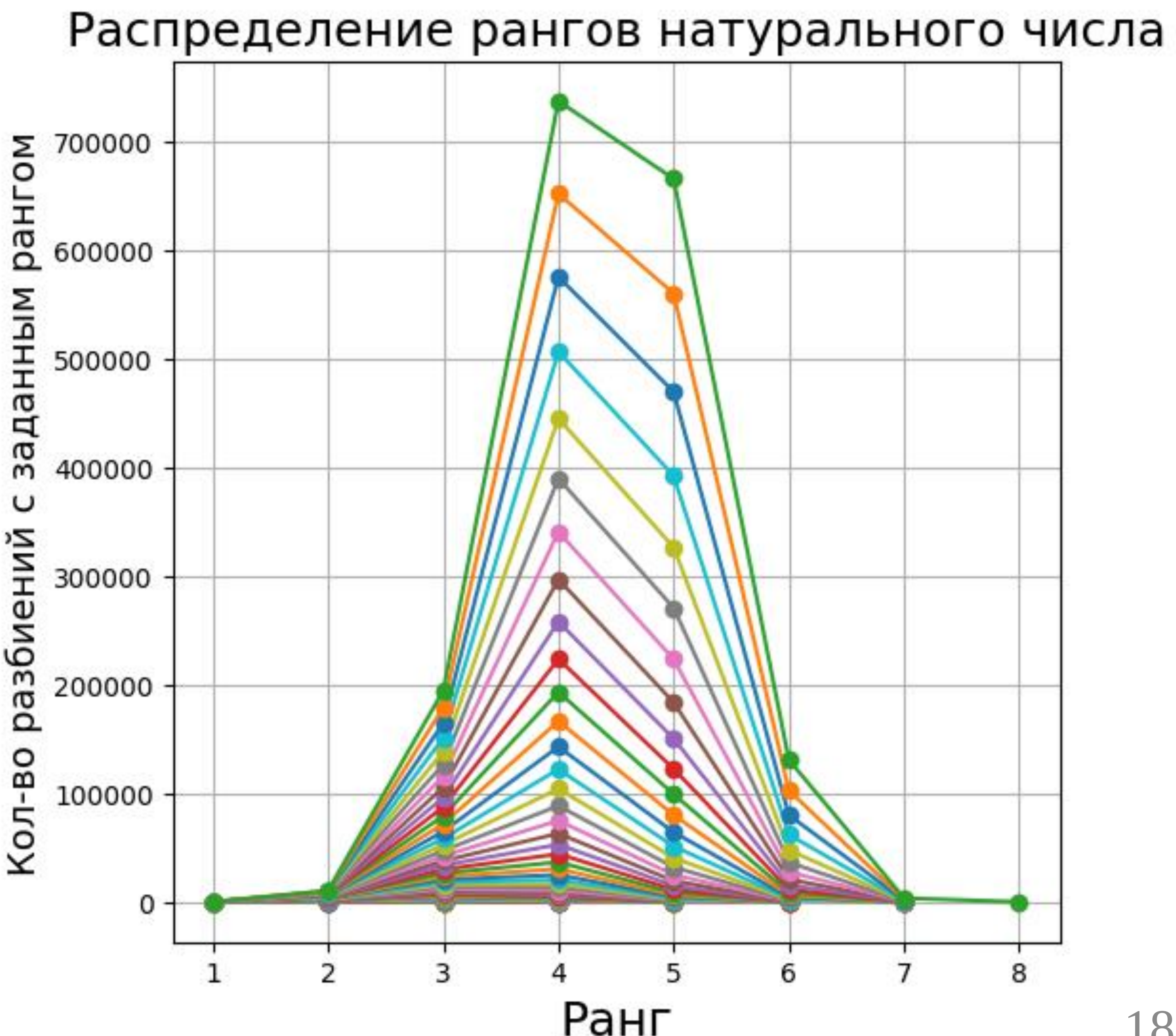


АППРОКСИМАЦИЯ САМОАССОЦИИРОВАННЫХ РАЗБИЕНИЙ





Свойство ранга $r \leq \sqrt{n}$


Распределение рангов натурального числа
Кол-во разбиений с заданным рангом
700000
600000
500000
400000
300000
200000
100000
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Ранг

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Реализован алгоритм вычисления вектора разбиения
2. Реализован алгоритм вычисления ранга
3. Реализован алгоритм вычисления характеристики вектора разбиения
4. Выполнен поиск самоассоциированных разбиений
5. Реализована систему для изучения чисел, связанных с разбиениями
6. Проведен анализ, полученных данных

МЕТРИКИ

- MAE (средняя абсолютная ошибка) показывает среднее абсолютное отклонение предсказанных значений от истинных
- MSE (средняя квадратичная ошибка) показывает среднее квадратичное отклонение предсказанных значений от исинных (штрафует за большие отклонения больше, чем MAE)

- MAE
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\hat{y}_i - y_i|$$
- MSE
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2$$

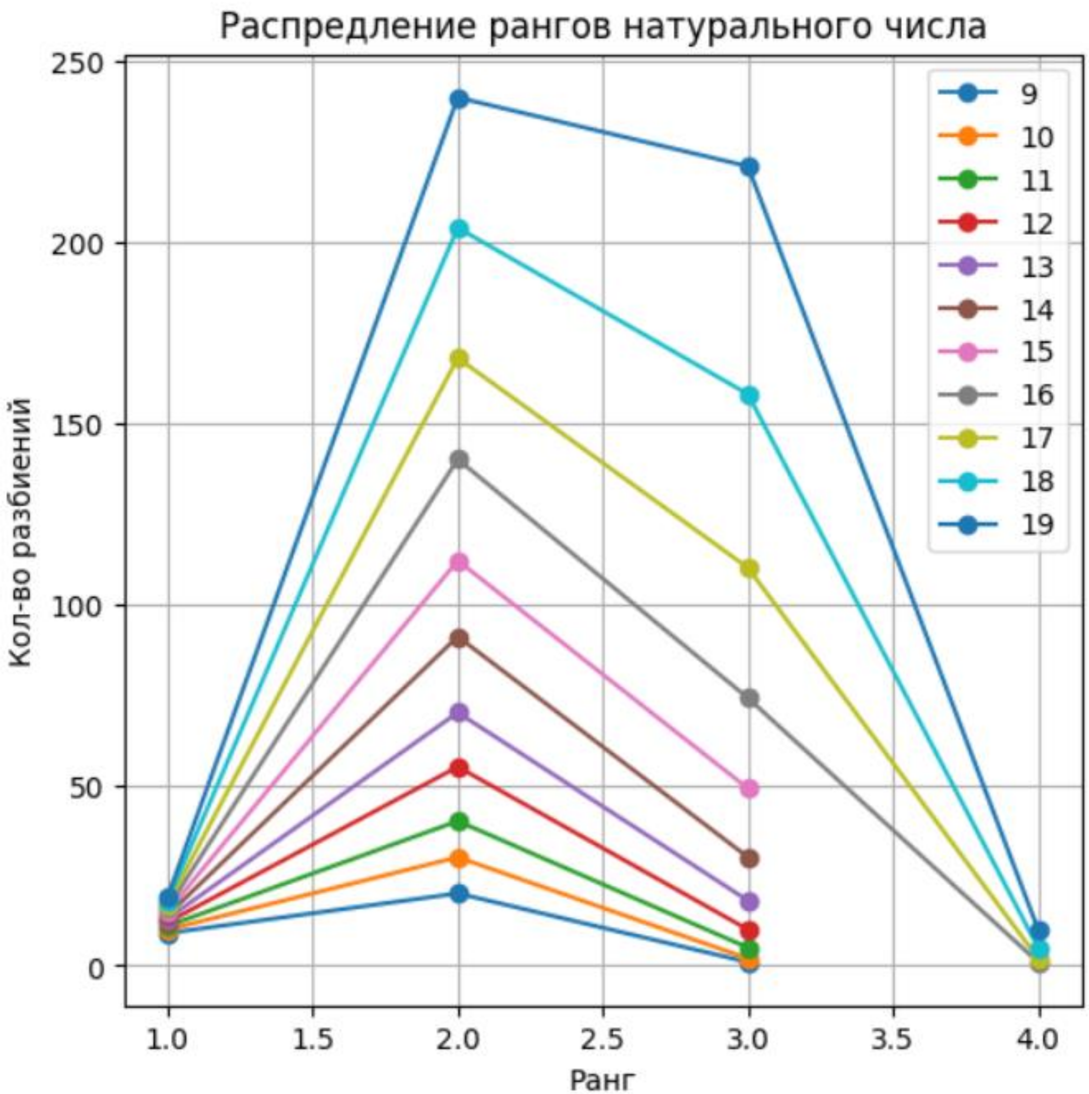
МЕТРИКИ

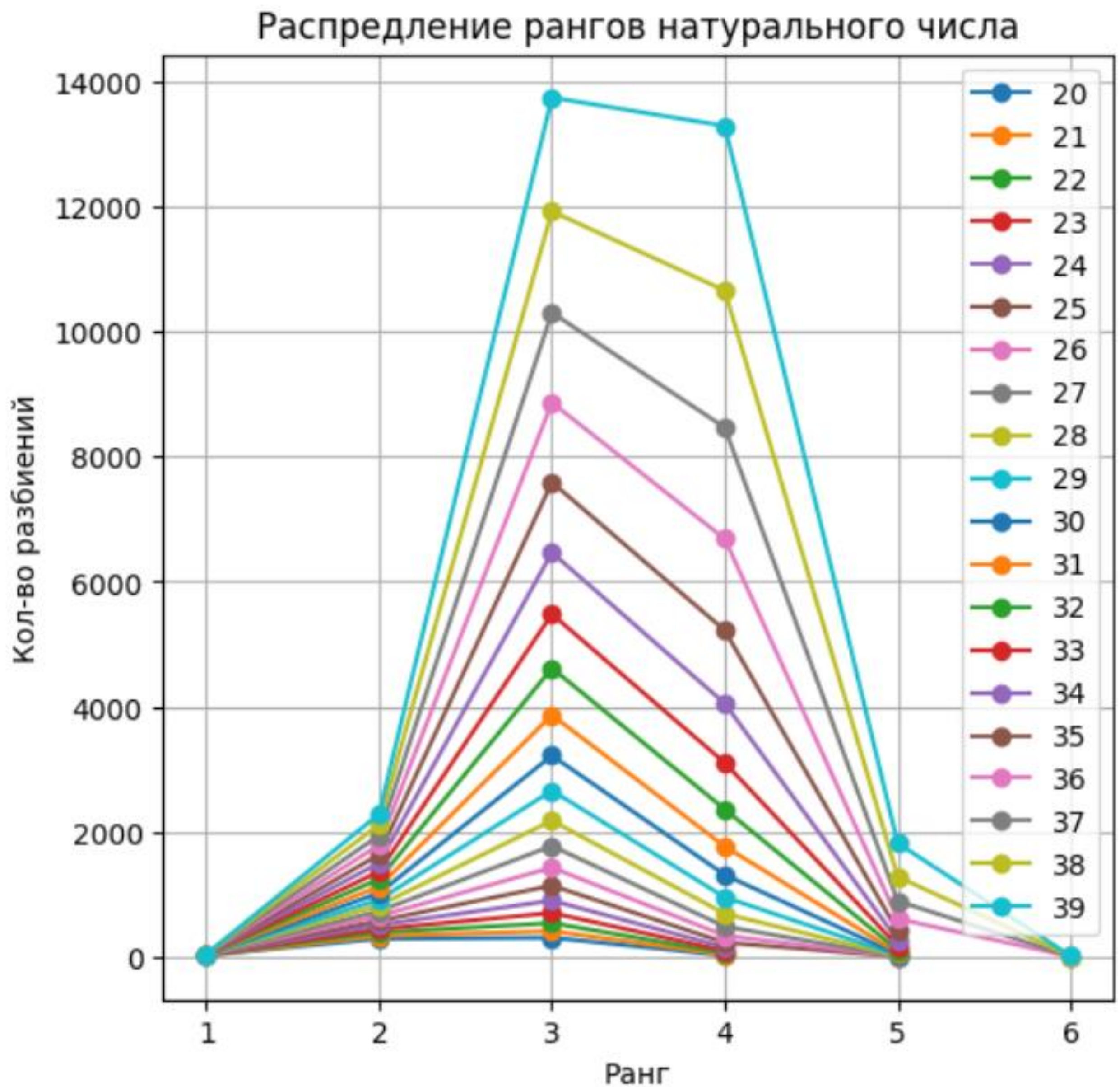
- SSE (остаточная сумма квадратов) – сумма квадратов разницы между фактическим и оценочным значениями
- SST (общее отклонение квадратов) – сумма квадратов разницы между фактическим и средним значением в выборке

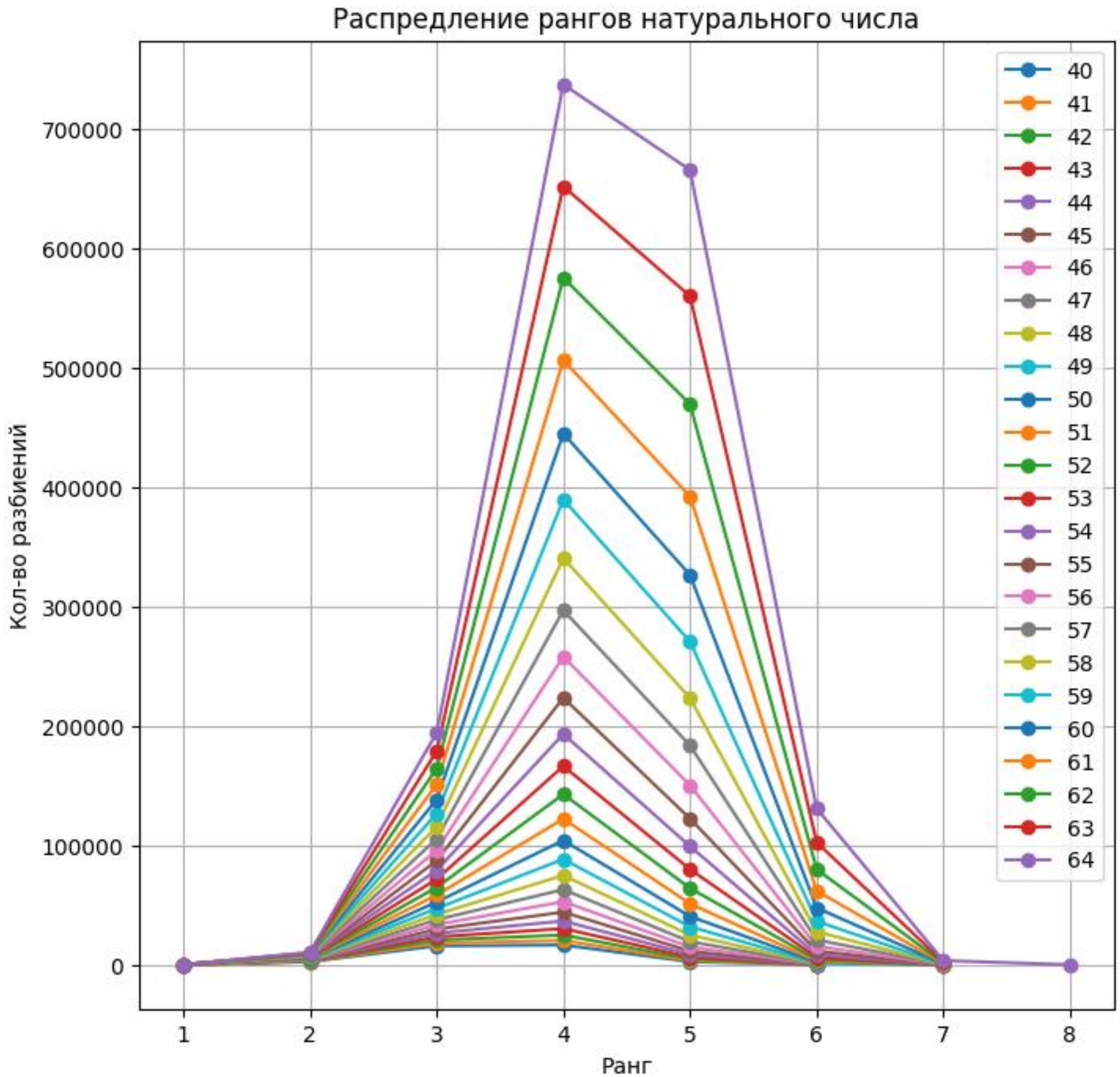
$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{STT}, \text{ где}$$

$$SSE = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

$$SST = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i^2)^2}{n}.$$


Распредление рангов натурального числа
Кол-во разбиений
Ранг
0
50
100
150
200
250
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19


Распредление рангов натурального числа
Кол-во разбиений
Ранг
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
1
2
3
4
5
6
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39


Распредление рангов натурального числа
Кол-во разбиений
Ранг
0
100000
200000
300000
400000
500000
600000
700000
1
2
3
4
5
6
7
8
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64