

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

**Высшая школа электроники и компьютерных наук
Кафедра системного программирования**

РАБОТА ПРОВЕРЕНА

Рецензент
Доцент кафедры ПМиП
ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)»,
к.э.н.

_____ Д.А. Дрозин
«__» _____ 2024 г.

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой, д.ф.-м.н.,
профессор

_____ Л.Б. Соколинский
«__» _____ 2024 г.

**Разработка компьютерной модели инерционного
механизма вращения**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ЮУрГУ – 02.04.02.2024.318-1409.ВКР**

Научный руководитель,
доцент кафедры СП, к.ф.-м.н.
_____ А.В. Геренштейн

Автор работы,
студент группы КЭ-220
_____ Д.О. Столбов

Ученый секретарь
(нормоконтролер)
_____ И.Д. Володченко
«__» _____ 2024 г.

Челябинск, 2024 г.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»**

**Высшая школа электроники и компьютерных наук
Кафедра системного программирования**

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой СП

_____ Л.Б. Соколинский

29.01.2024 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы магистранта

студенту группы КЭ-220

Столбову Дмитрию Олеговичу,

обучающемуся по направлению

02.04.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»
(магистерская программа «Машинное обучение и анализ больших данных»)

1. Тема работы (утверждена приказом ректора от 22.04.2024 г. № 764-13/12)

Разработка компьютерной модели инерционного механизма вращения.

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 20.05.2024 г.

3. Исходные данные к работе

3.1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – Издательский центр «Наука», 1966. – С. 41–51.

3.2. Бухгольц Н.Н. Основы курс теоретической механики. Часть 2. Динамика системы материальных точек. – Издательский центр «Лань», 2022. – С. 69–100.

3.3. Крайнев А.Ф. Механика машин. Фундаментальный словарь. – М. Машиностроение, 2000. – 904 с.

3.4. Пожбелко В.И. Инерционно–импульсные приводы машин с динамическими связями. – М.: Машиностроение, 1989 – 137 с.

4. Перечень подлежащих разработке вопросов

4.1. Провести анализ инерционных механизмов вращения.

- 4.2. Провести математический анализ инерционных механизмов вращения.
- 4.3. Реализовать компьютерную модель инерционного механизма вращения.
- 5. Дата выдачи задания: 29.01.2024 г.**

Научный руководитель,
доцент кафедры СП, к.ф.-м.н.

А.В. Геренштейн

Задание принял к исполнению

Д.О. Столбов

ГЛОССАРИЙ

1. *Склерономная система* – это свободная механическая система, либо система, на которую наложены только стационарные связи [5].

2. *Голономная система* – механическая система, механические связи которой можно свести к геометрическим (то есть, к голономным) [5].

3. *Сателлит* – зубчатое колесо с подвижной осью вращения, совершающее движение одновременно вокруг своей оси и оси центрального колеса [2].

4. *Виртуальный дифференциал* – дифференциалы при фиксированном (замороженном) t [13].

5. *Упругие силы* – силы упругости, возникающая при упругой деформации растяжения или сжатия тела, пропорциональна абсолютному значению изменения длины тела [6].

6. *Квадратичная форма* – функция на векторном пространстве, задаваемая однородным многочленом второй степени от координат вектора [6].

7. *Инерционный механизм* – устройство или же аппарат, якобы способные придать поступательное движение в пространстве (или по поверхности) без взаимодействия с окружающей средой, а лишь за счет перемещения рабочего тела, находящегося внутри [10].

8. *Обобщенная сила* – величина коэффициента при вариации обобщенной координаты в слагаемом выражения для виртуальной работы [5].

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛОССАРИЙ.....	4
ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. АНАЛИЗ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ	8
1.1. Обзор литературы	8
2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	9
2.1. Выражение кинетической энергии и работы действующих сил ..	9
2.2. Вид уравнений Лагранжа	12
2.3. Система материальных точек, эквивалентная твердому телу.....	15
2.4. Связь изотермических погружений с задачами синтеза инерционных механизмов	19
2.5. Синтез инерционных механизмов вращения	25
3. РЕАЛИЗАЦИЯ И ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММЫ	32
3.1. Описание механизма.....	32
3.1. Реализация программы.....	33
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	37
ЛИТЕРАТУРА.....	38

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность

Разработка компьютерной модели [12] инерционного механизма вращения имеет высокую актуальность в современной инженерной практике. Верно спроектированный инерционный механизм может быть полезен в широком спектре приложений, включая транспортные системы, промышленное оборудование, робототехнику, аэрокосмическую и автомобильную промышленность и другие отрасли.

Инерционный механизм вращения основан на использовании инерции объекта для создания крутящего момента. Это позволяет эффективно передавать и контролировать момент вращения без необходимости применения внешних источников энергии. Такой подход позволяет снизить нагрузку на электроприводы и повысить энергоэффективность системы.

Разработка компьютерной модели инерционного механизма вращения позволяет провести тщательное исследование его динамических характеристик, проверить различные конфигурации и оптимизировать его работу. Компьютерное моделирование позволяет существенно сократить время и затраты, которые обычно связаны с созданием прототипов и проведением физических испытаний. Также, моделирование инерционных механизмов помогает предвидеть и оценивать возможные проблемы и риски, связанные с их эксплуатацией. Это позволяет разработчикам и инженерам принимать обоснованные решения на ранних стадиях проектирования, чтобы избежать потенциальных проблем и повысить надежность и безопасность системы.

Таким образом, разработка компьютерной модели инерционного механизма вращения имеет огромное практическое значение, поскольку позволяет значительно повысить эффективность и надежность различных технических систем. Это помогает сократить затраты на их проектирование и эксплуатацию, а также повышает уровень инноваций в инженерных отраслях.

Постановка задачи

Целью выпускной квалификационной работы является разработка компьютерной модели инерционного механизма вращения. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) изучить предметную область;
- 2) разработать и реализовать математическую модель инерционного механизма вращения;
- 3) разработать и реализовать компьютерную модель инерционного механизма вращения.

Структура и содержание работы

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 39 страниц, объем списка литературы – 20 источников.

В первой главе приведен обзор научной литературы.

Во второй главе описываются основные теоретические сведения и разработке математической модели инерционного механизма вращения.

Третья глава посвящена разработке компьютерной модели инерционного механизма вращения.

В заключении сделаны выводы о проделанной работе и полученных результатах.

1. АНАЛИЗ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

1.1. Обзор литературы

В современной научно-технической среде инерционные устройства играют важную роль в области управления и технического прогресса. В данной главе будут рассмотрены основные работы, посвященные таким важным аспектам, как инерционный двигатель. Информация из научных исследований и публикаций поможет более глубоко понять принципы работы, конструктивные особенности и применение инерционных устройств в различных областях.

1. «Инерционный двигатель» [4] – в данной работе рассматривается инерционный двигатель, используемый в устройствах кратковременного действия для придания элементам конструкции вращательного движения.

2. «Кинетика и динамика инерционных приборов» [1] – в данной работе подробно описывает связь между функциональными характеристиками инерционных приборов и их конструктивными параметрами.

3. «Универсальный инерционный движитель для различных видов транспорта и способ его получения» [16] – в данной работе рассматривается разработка универсального инерционного движителя для различных видов транспорта.

В результате анализа литературных источников были выявлены ключевые аспекты использования инерционных устройств в технических системах. Информация из описанных работ позволяет лучше понять особенности инерционного двигателя, связь между функциональными характеристиками инерционных приборов и их конструктивными параметрами, а также перспективы развития универсальных инерционных движителей для различных видов транспорта. Дальнейшие исследования на основе этой информации позволят расширить знания в области инерционных устройств и их применения в современной технике.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Выражение кинетической энергии и работы действующих сил

Пусть дана голономная система из N материальных точек P_ν с радиусами - векторами $r_\nu = x_\nu i + y_\nu j + z_\nu k$ ($\nu = 1, \dots, N$), подчиненная конечным связям, формула (1):

$$f_\alpha(t, r) = 0, (\alpha = 1, \dots, d), \quad (1)$$

или (в эквивалентной записи) формула (1'):

$$f_\alpha(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0, (\alpha = 1, \dots, d). \quad (1')$$

Предполагается, что d функций f_α от $3N$ аргументов x_ν, y_ν, z_ν ($\nu = 1, \dots, N$) независимы, t здесь рассматривается как параметр. Поэтому из уравнения (1') выразить d координат как функции $3N - d$ остальных и времени t и рассматривать эти $3N - d$ координат как независимые величины, определяющие положение системы в момент времени t .

Однако не обязательно в качестве таких независимых координат брать декартовы координаты. Можно все $3N$ декартовых координат выразить в виде функций (2) от $n = 3N - d$ независимых параметров q_1, \dots, q_n , и от t :

$$\begin{cases} x_\nu = \varphi_\nu(t, q_1, \dots, q_n), \\ z_\nu = \chi_\nu(t, q_1, \dots, q_n), \\ y_\nu = \psi_\nu(t, q_1, \dots, q_n), \end{cases} \quad (2)$$

$(\nu = 1, \dots, N).$

Эти функции, будучи подставлены в уравнения связей (1'), обращают последние в тождества. Кроме того, предполагается, что любое положение системы, совместимое со связями в данный момент времени, может быть получено из равенств (2) при некоторых значениях величин q_1, \dots, q_n .

Формулы (2) эквивалентны векторным равенствам (2'):

$$r_\nu = r_\nu(t, q_1, \dots, q_n). \quad (2')$$

Скалярные функции, представленные в формуле (2), а следовательно, и векторные функции, представленные в формуле (2'), предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

Минимальное число величин q_i , с помощью которых формулами (2) можно охватить все возможные положения голономной системы, совпадает с числом степеней свободы этой системы $n = 3N - d$.

Величины q_1, \dots, q_n в формулах (2) или (2') (n – число степеней свободы) называются независимыми обобщенными координатами системы.

Для каждого момента времени t между возможными положениями системы и точками некоторой области в n – мерном координатном пространстве q_1, \dots, q_n устанавливается взаимно–однозначное соответствие. Каждому положению системы в момент времени t соответствует точка в пространстве q_1, \dots, q_n , изображающая это положение системы. Движению системы соответствует движение точки в координатном пространстве q_1, \dots, q_n .

Если все связи стационарны (склерономная система), то время t не входит явно в уравнения (1'). Тогда всегда можно выбрать так координаты q_1, \dots, q_n чтобы и в уравнения (2) время t не входило. В дальнейшем предполагается, что для склерономной системы независимые координаты q_1, \dots, q_n выбраны именно таким образом. Тогда для склерономной системы формулы (2) и (2') принимают вид равенств (3):

$$\begin{aligned} x_v &= \varphi_v(q_i), \\ y_v &= \psi_v(q_i), \\ z_v &= \chi_v(q_i), \\ (v &= 1, \dots, N), \end{aligned} \tag{3}$$

или равенств (3'):

$$\begin{aligned} x_v &= \varphi_v(q_i), \\ (v &= 1, \dots, N). \end{aligned} \tag{3'}$$

Каждой координате q_i соответствует своя обобщенная сила $Q_i(t = 1, \dots, n)$. Обобщенные силы определяются следующим образом. Рассмотрим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях, представленную в формуле (4):

$$\delta A = \sum_{v=1}^N F_v \delta r_v. \quad (4)$$

Но виртуальными перемещениями δr_v являются виртуальные дифференциалы (5) (т.е. дифференциалы при фиксированном (замороженном) t) от функции $r_v(t, q_i)$:

$$\delta r_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \delta q_i, \quad (5)$$

$(v = 1, \dots, N).$

Подставим выражение из формулы (5) в правую часть формулы (4) и выразим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях через произвольные элементарные приращения δq_i независимых координат $q_i (i = 1, \dots, n)$ формулой (6):

$$\begin{aligned} \delta A &= \sum_{v=1}^N F_v \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{v=1}^N F_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \\ &= \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (v = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты при δq_i – обобщенные силы Q_i – определяются равенствами (7):

$$Q_i = \sum_{v=1}^N F_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7)$$

На практике при нахождении величины Q_i далеко не всегда пользуются формулой (7); вместо этого системе дают такое элементарное виртуальное перемещение, при котором только i -я координата q_i получает некоторое приращение, а остальные независимые координаты не изменяются. После этого вычисляют работу активных сил δA_i ; на таком специально выбранном перемещении. Тогда $\delta A_i = Q_i \delta q_i$ и $Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}$.

Пусть теперь некоторое положение системы является положением равновесия. Согласно принципу виртуальных перемещений это возможно тогда и только тогда, когда выполняется равенство (8):

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0. \quad (8)$$

Но приращение δq_i независимых координат q_i могут быть совершенно произвольными. Поэтому формула (8) эквивалентна системе равенств (9):

$$Q_i = 0, (i = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Таким образом, положение голономной системы является положением равновесия в том и только в то случае, когда в этом положении все обобщенные силы равны нулю.

2.2. Вид уравнений Лагранжа

Приступая к выводу дифференциальных уравнений движения голономной системы в независимых координатах q_1, \dots, q_n исходя из общего уравнения динамики, представленного в формуле (10):

$$\sum_{v=1}^N (F_v - m_v \omega_v) \delta r_v = 0. \quad (10)$$

Аналогично выражению для элементарной работы активных сил можно представить элементарную работу сил инерции формулой (11):

$$\delta A_J = - \sum_{v=1}^N m_v \omega_v \delta r_v = - \sum_{i=1}^n Z_i \delta q_i, \quad (11)$$

где по аналогии с выражением из формулы (7) получается формула (12):

$$\begin{aligned} Z_i &= \sum_{v=1}^N m_v \omega_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} = \sum_{v=1}^N m_v \frac{dr_v}{dt} \frac{\partial r_v}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N m_v r_v \frac{\partial r_v}{\partial q_i} - \sum_{v=1}^N m_v r_v \frac{d}{dt} \frac{\partial r_v}{\partial q_i}, (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (12)$$

Но скорость линейно зависит от \dot{q}_k ($k = 1, \dots, n$), получаем формулу (13):

$$\dot{r}_v = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_v}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_v}{\partial t}. \quad (13)$$

Из формулы (13) находится формула (14):

$$\frac{\partial \dot{r}_v}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial r_v}{\partial q_i}, \quad (14)$$

$$(i = 1, \dots, n; v = 1, \dots, N).$$

С другой стороны, из той же формулы (13) получается формулу (15):

$$\frac{\partial \dot{r}_v}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r_v}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 r_v}{\partial q_i \partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial r_v}{\partial \dot{q}_i}, \quad (15)$$

$$(i = 1, \dots, n; v = 1, \dots, N).$$

Поэтому выражение из формулы (12) для Z_i может быть записано в виде формулы (16):

$$Z_i = \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N m_v \dot{r}_v \frac{\partial \dot{r}_v}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{v=1}^N m_v \dot{r}_v \frac{\partial \dot{r}_v}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (16)$$

где T – кинетическая энергия системы, выражена формулой (17):

$$T = \sum_{v=1}^N m_v \dot{r}_v^2. \quad (17)$$

Общее уравнение динамики (10) дает формулу (18):

$$\delta A + \delta A_J = 0, \quad (18)$$

или в силу равенств (10) и (12) получается формула (19):

$$\sum_{i=1}^n (Q_i - Z_i) \delta q_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (19)$$

Так как q_i – независимые координаты и поэтому δq_i – совершенно произвольные приращения координат ($i = 1, \dots, n$), то равенство (19) может иметь место тогда и только тогда, когда все коэффициенты при δq_i в

уравнении (19) равны нулю. Поэтому общее уравнение динамики (19) эквивалентно системе уравнений (20):

$$Z_i = Q_i, (i = 1, \dots, n), \quad (20)$$

которые, согласно соотношениям (16), могут быть записаны в виде формулы (21):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, (i = 1, \dots, n). \quad (21)$$

Уравнения (21) носят название уравнений Лагранжа второго рода или уравнений Лагранжа в независимых координатах.

Величины \dot{q}_i ($i = 1, \dots, n$) называются обобщенными скоростями. Скорости точек системы $v_\nu = \dot{r}_\nu$ выражаются через обобщенные скорости (а также через независимые координаты и время) с помощью формул (13). Величины \ddot{q}_i ($i = 1, \dots, n$) называются обобщенными ускорениями.

В левые части уравнений Лагранжа (21) после выполнения операции $\frac{d}{dt}$ входят время t , обобщенные координаты q_i , обобщенные скорости \dot{q}_i и обобщенные ускорения \ddot{q}_i ($i = 1, \dots, n$). Обобщенные силы Q_i ($i = 1, \dots, n$), стоящие в правых частях уравнений Лагранжа, обычно задаются как функции (22) от t, q_k, \dot{q}_k ($k = 1, \dots, n$):

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k), (i = 1, \dots, n). \quad (22)$$

Уравнения Лагранжа (21) образуют систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с n неизвестными функциями q_i от независимого переменного t . Порядок этой системы равен $2n$. Система дифференциальных уравнений, определяющая движение голономной системы с n степенями свободы, не может иметь порядок, меньший $2n$, так как в силу произвольности начальных значений величины q_i и \dot{q}_i ($i = 1, \dots, n$) решение системы должно содержать, по крайней мере, $2n$ произвольных постоянных. Таким образом, система уравнений Лагранжа в независимых координатах имеет наименьший возможный порядок [3].

В случае несвободной системы подлежат определению еще реакции R_ν ($\nu = 1, \dots, N$). Реакции не входят в уравнения Лагранжа. Это существенное преимущество уравнений Лагранжа. После того как уравнения Лагранжа проинтегрированы и найдены функции $q_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) определяют $r_\nu = r_\nu(t)$ и, следовательно, $v_\nu = \dot{r}_\nu$, и $F_\nu(t, q_k, \dot{q}_k)$ ($\nu = 1, \dots, N$). После этого неизвестные реакции определяются из формулы (23):

$$R_\nu = m_\nu \omega_\nu - F_\nu, (\nu = 1, \dots, N). \quad (23)$$

В случае свободной системы материальных точек уравнения Лагранжа представляют собой компактную запись уравнений движения в произвольной системе координат.

2.3. Система материальных точек, эквивалентная твердому телу

Известно, что если два твердых тела имеют равные массы и соответственно равные моменты инерции относительно главных центральных (проходящих через центр масс) осей, то при действии одинаковых сил (и при одинаковых начальных условиях) движение их центров масс и движения относительно центров масс одинаковы. В этом смысле такие два тела называются эквивалентными.

Итак, зададим четыре числа M, I_x, I_y, I_z , при этом $M > 0$, а I_x, I_y, I_z неотрицательны и удовлетворяют неравенству треугольника, т.е. сумма двух любых не меньше третьего. Покажем, что можно подобрать не более четырех материальных точек таких, что сумма их масс будет равна M , а моменты инерции относительно главных центральных осей (которые задаются заранее и являются взаимно перпендикулярными) этой системы точек равнялись бы I_x, I_y, I_z . Если зафиксировать расстояния между этими точками, т.е. считать, что они соединены жесткими невесомыми прямолинейными стержнями, то получим систему точек, эквивалентную исходному твердому телу.

Введем в \mathbb{R}^3 декартовы координаты ξ, η, ζ . Будем считать, что оси координат задаются главными центральными осями инерции. Постараемся подобрать не более четырех материальных точек $A_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k, m_k)$, где $k = 1, 2, 3, 4$; $\xi_k, \eta_k, \zeta_k, m_k$ – координаты точек A_k в выбранных осях координат, m_k – масса точки A_k , так, чтобы их суммарная масса равнялась бы M , центр масс находился бы в начале координат, а моменты инерции относительно осей ξ, η, ζ равнялись бы соответственно I_x, I_y, I_z .

Обозначим формулой (24):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-I_x + I_y + I_z}{2}, \\ I_2 &= \frac{I_x - I_y + I_z}{2}, \\ I_3 &= \frac{I_x + I_y - I_z}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь I_1, I_2, I_3 – произвольные неотрицательные числа. Искомые числа $\xi_k, \eta_k, \zeta_k, m_k$ должны удовлетворять системе уравнений (25):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_k m_k = M; \quad \sum_k m_k \xi_k = \sum_k m_k \eta_k = \sum_k m_k \zeta_k = 0; \\ \sum_k m_k \xi_k^2 = I_1; \quad \sum_k m_k \eta_k^2 = I_2; \quad \sum_k m_k \zeta_k^2 = I_3; \\ \sum_k m_k \eta_k \zeta_k = \sum_k m_k \xi_k \zeta_k = \sum_k m_k \xi_k \eta_k = 0. \end{array} \right. \quad (25)$$

Для определенности будем считать, что $I_1 \geq I_2 \geq I_3 \geq 0$.

Могут представиться четыре случая.

1. $I_1 = I_2 = I_3 = 0$.

В этом случае одним из решений системы уравнений (25) является формула (26):

$$m_2 = m_3 = m_4 = 0, \quad \xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0, \quad m_1 = M, \quad (26)$$

т.е. имеем систему, состоящую из одной точки, находящейся в начале координат. Поскольку массы остальных точек равны нулю, то определение их координат лишено смысла.

2. $I_2 = I_3 = 0; I_1 > 0$.

В этом случае можно ограничиться системой, состоящей из двух материальных точек. Такие системы описываются следующим семейством решений уравнений (25):

$$\begin{cases} m_3 = m_4 = 0; \eta_1 = \eta_2 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0; \\ m_1 = M \cos^2 \varphi; & m_2 = M \sin^2 \varphi; \\ \xi_1 = -\sqrt{\frac{I_1}{M}} \operatorname{tg} \varphi; & \xi_2 = \sqrt{\frac{I_1}{M}} \operatorname{ctg} \varphi. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь φ – произвольное число, не кратное $\frac{\pi}{2}$.

Минимизируя длину отрезка A_1A_2 , получается формула (29):

$$m_1 = m_2 = \frac{M}{2}; \quad \xi_1 = -\sqrt{\frac{I_1}{M}}; \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{I_1}{M}}. \quad (29)$$

Т.е. указанные две точки находятся на оси ξ .

3. $I_3 = 0, I_1 \geq I_2 > 0$.

В этом случае можно обойтись тремя точками, расположенными в плоскости $\zeta = 0$, т.е. можно считать, что $m_4 = 0; \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0$.

Массы остальных точек и их координаты описываются системой уравнений (26):

Здесь θ, φ, ψ – любые действительные числа, причем θ и φ не кратны $\frac{\pi}{2}$. Итак, каждому набору трех чисел (θ, φ, ψ) соответствует система трех материальных точек, удовлетворяющая условиям (1) и (2).

4. $I_1 \geq I_2 \geq I_3 > 0$.

В этом случае система состоит из четырех точек. Для описания всех таких систем поступим следующим образом.

$$\text{Обозначим: } x_1^k = \xi_k \sqrt{\frac{m_k}{I_1}}; \quad x_2^k = \eta_k \sqrt{\frac{m_k}{I_2}}; \quad x_3^k = \zeta_k \sqrt{\frac{m_k}{I_3}}; \quad x_4^k = \sqrt{\frac{m_k}{M}},$$

где $k = 1, 2, 3, 4$.

$$\left\{ \begin{array}{l}
m_1 = M \sin^2 \theta \sin^2 \varphi; \quad m_2 = M \sin^2 \theta \cos^2 \varphi; \quad m_3 = M \cos^2 \theta; \\
\xi_1 = \sqrt{\frac{I_1}{M}} \frac{1}{\sin \theta \sin \varphi} (\cos \theta \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi); \\
\eta_1 = \sqrt{\frac{I_2}{M}} \frac{1}{\sin \theta \sin \varphi} (\cos \theta \sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi); \\
\xi_2 = \sqrt{\frac{I_1}{M}} \frac{1}{\sin \theta \cos \varphi} (\cos \theta \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi); \\
\eta_2 = \sqrt{\frac{I_2}{M}} \frac{1}{\sin \theta \cos \varphi} (\cos \theta \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi); \\
\xi_3 = -\sqrt{\frac{I_1}{M}} \frac{\cos \psi \sin \theta}{\cos \theta}; \quad \eta_3 = -\sqrt{\frac{I_2}{M}} \frac{\sin \psi \sin \theta}{\cos \theta}.
\end{array} \right. \quad (29)$$

Теперь соотношения (25) принимают вид формулы (30):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^4 x_i^k x_j^k &= \delta_{ij}; \\
(i, j &= 1, 2, 3, 4), \\
\delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}.
\end{aligned} \quad (30)$$

Итак, x_i^k является ортонормированной матрицей четвертого порядка, причем $x_4^k > 0$, ($k = 1, 2, 3, 4$).

Рассматривая любую ортонормированную матрицу, удовлетворяющую условиям (3), определяются искомые числа $\xi_k, \eta_k, \zeta_k, m_k$.

По сути дела, прием, аналогичный изложенному, применялся и в предыдущих случаях. В частности, одним из решений системы (25) является система уравнений (31):

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \frac{M}{4}; \\ \xi_1 = \sqrt{\frac{I_1}{3M}}; \xi_2 = \sqrt{\frac{I_1}{3M}}; \xi_3 = \sqrt{\frac{I_1}{3M}}; \xi_4 = -\sqrt{\frac{3I_1}{M}}; \\ \eta_1 = \sqrt{\frac{2I_2}{3M}}; \eta_2 = \sqrt{\frac{2I_2}{3M}}; \eta_3 = -\sqrt{\frac{8I_2}{3M}}; \eta_4 = 0; \\ \zeta_1 = \sqrt{\frac{2I_3}{M}}; \zeta_2 = -\sqrt{\frac{2I_3}{M}}; \zeta_3 = \zeta_4 = 0. \end{array} \right. \quad (31)$$

Разумеется, можно указать системы, состоящие из большего, чем четыре, числа точек с заданными суммарной массой и моментами инерции.

Следует напомнить, что координаты точек указаны относительно осей инерции, т.е. относительно жестко связанной с телом системы координат. Чтобы получить координаты искомым точек относительно неподвижной декартовой системы координат, следует, например, ввести углы Эйлера и т.п.

Если воспользоваться обозначениями (32):

$$x_k = \sqrt{m_k} \xi_k; \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (32)$$

то случай 1 интерпретируется как движение одной точки в трехмерном евклидовом пространстве (или трех точек в одномерном пространстве); случай 2 – как движение одной точки в шестимерном пространстве, или двух точек в трехмерном, или шести точек в одномерном евклидовом пространстве; случай 3 – как движение одной точки в девятимерном; случай 4 – как движение одной точки в двенадцатимерном, или трех точек в четырехмерном, или четырех точек в трехмерном евклидовом пространстве и т.п.

2.4. Связь изотермических погружений с задачами синтеза инерционных механизмов

Механическая система состоит из конечного числа материальных точек и «абсолютно твердых тел» [15]. Кинетическая энергия материальной точки записывается в виде формулы (33) [7]:

$$T = m \left(\frac{\dot{\xi}^2}{2} + \frac{\dot{\eta}^2}{2} + \frac{\dot{\zeta}^2}{2} \right), \quad (33)$$

где m – масса точки, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ – проекции вектора скорости точки на оси декартовой системы координат трехмерного евклидова пространства.

Если твердое тело движется так, что ось вращения, проходящая через центр масс, сохраняет направление в пространстве, то его кинетическая энергия примет вид уравнения (34):

$$T = m \left(\frac{\dot{\xi}^2}{2} + \frac{\dot{\eta}^2}{2} + \frac{\dot{\zeta}^2}{2} \right) + J \frac{\dot{\phi}^2}{2}, \quad (34)$$

где m – масса точки, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ – составляющие скорости центра масс, J – момент инерции тела вокруг указанной оси, $\dot{\phi}$ – угловая скорость тела относительно этой оси.

Если твердое тело движется произвольным образом, то его движение совпадает с движением тетраэдра, масса которого сосредоточена в вершинах, причем длины ребер и массы вершин подобраны таким образом, что и у исходного твердого тела, и у тетраэдра массы и моменты инерций относительно главных центральных осей совпадают [9].

Точнее, движение абсолютно твердого тела эквивалентно движению системы, состоящей не более чем из четырех материальных точек, и, следовательно, кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в виде суммы не более четырех слагаемых вида (34).

Итак, можно считать, что кинетическая энергия механической системы записывается в виде формулы (35):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \dot{\xi}_k^2, \quad (35)$$

т.е. система состоит только из материальных точек, причем в выражении (35) нумерация координат сквозная. Последнее слагаемое $J \frac{\dot{\phi}^2}{2}$ в формуле (34) можно трактовать как кинетическую энергию материальной точки массы J , движущейся вдоль прямой со скоростью $\dot{\phi}$.

Поскольку рассматривается система со связями, то натуральное число N не является инвариантом данной системы: любое слагаемое правой части формулы (35) вида $m_k \dot{\xi}_k^2$ можно заменить суммой $m_{k1} \dot{\xi}_{k1}^2 + m_{k2} \dot{\xi}_{k2}^2$, где $m_{k1} = m_{k2} = \frac{1}{2} m_k$, $\xi_{k1} = \xi_{k2} = \xi_k$, т.е. ξ_{k1} и ξ_{k2} не являются независимыми координатами.

Если ввести обозначения (36):

$$x_k = \sqrt{m_k} \xi_k; \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (36)$$

то выражение (35) для кинетической энергии примет вид формулы (37):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \dot{x}_k^2. \quad (37)$$

Это кинетическая энергия материальной точки массы 1, перемещающейся в N -мерном евклидовом пространстве.

Если на систему наложены голономные связи, то величины x_k не являются независимыми, а являются функциями n независимых параметров q^1, q^2, \dots, q^n – обобщенных координат. При этом точка движется в n -мерном подмногообразии \tilde{Q} (даже в клеточном подпространстве размерности n) N -мерного евклидова пространства. Число n является инвариантом и называется числом степеней свободы системы. На практике обычно отыскивают множество (38):

$$Q = \{(q^1, q^2, \dots, q^n)\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (38)$$

причем Q имеет внутренние точки (относительно \mathbb{R}^n) и такое отображение: $f: Q \rightarrow \tilde{Q} \subset \mathbb{R}^n$, которое имеет ранг n «почти во всех» внутренних точках Q . В координатном представлении отображение f имеет вид формулы (39):

$$x_k = x_k(q^1, q^2, \dots, q^n); \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (39)$$

Подставляя (39) в (37), получается формулу (40):

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l, \quad (40)$$

Где a_{kl} рассчитывается по формуле (41):

$$a_{kl} = \sum_{m=1}^N \frac{\partial x_m}{\partial q^k} \frac{\partial x_m}{\partial q^l}; \quad (41)$$

$(k, l = 1, 2, \dots, n).$

Правая часть равенства (40) есть положительно определенная квадратичная форма «почти во всех» внутренних точках Q . Впрочем, легко заметить, что множество тех внутренних точек Q , в которых либо отображение имеет ранг меньше n , либо квадратичная форма (40) вырождена, нигде не плотно в Q . Это следует из гладкости рассматриваемых функций. Величины q^i – суть обобщенные координаты; в практических задачах они могут иметь конкретный физический смысл: например, угол поворота вращающегося вала, величина отклонения стрелки прибора и т.п.

Пусть формула (42) – потенциал внутренних сил системы:

$$U = U(q^1, q^2, \dots, q^n). \quad (42)$$

Обычно под внутренними силами понимаются упругие силы, например, пружинок, которыми соединены различные звенья механизма. Тогда движение описывается уравнениями Лагранжа второго рода (43):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} + \frac{\partial U}{\partial q^i} = M_i, \quad (43)$$

учитывая формулы (40) и (41), уравнения Лагранжа записывается в виде формулы (44):

$$a_{il} \frac{d\dot{q}^l}{dt} + \left(\frac{\partial a_{il}}{\partial q^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^k \dot{q}^l + \frac{\partial U}{\partial q^i} = M_i. \quad (44)$$

Если ввести метрическую квадратичную форму получается формула (45):

$$ds^2 = 2Tdt^2 = a_{ij}dq^i dq^j, \quad (45)$$

которая индуцирована формой: $ds^2 = \sum_{k=1}^N (dx_k)^2$, с помощью отображения (39). Уравнения Лагранжа можно представить в виде формулы (46):

$$a_{ij}\ddot{q}^i + \Gamma_{i,jk}\dot{q}^j \dot{q}^k + \frac{\partial U}{\partial q^i} = M_i, \quad (46)$$

где формула (47) – символы Кристоффеля первого рода:

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i} \right). \quad (47)$$

Итак, движение системы с голономными склерономными связями интерпретируются как движение материальной точки единичной массы в n -мерном римановом пространстве, погруженном изометрически в N -мерное евклидово пространство; указанное погружение реализуется формулами (39).

В процессе перехода от движения системы точек в трехмерном евклидовом пространстве к движению одной точки в N – мерном евклидовом пространстве могут быть использованы и иные, «промежуточные» интерпретации, особенно при постановке различных задач. Так, можно говорить о движении N точек с различными массами в одномерном евклидовом пространстве; такая постановка подразумевается при «сквозной» нумерации евклидовых координат. Можно также считать, что N_1 точек движется в одномерном евклидовом пространстве, N_2 точек – в двумерном евклидовом пространстве и т.д, причем: $\sum_k kN_k = N$.

Разумеется, координаты точек не являются независимыми – именно это и приводит к основной интерпретации движения одной точки по n -мерной гиперповерхности в N -мерном евклидовом пространстве.

Движение твердого тела с постоянным направлением оси вращения, приводящее к кинетической энергии (34), можно интерпретировать либо как движение одной точки в четырехмерном евклидовом пространстве, либо как движение четырех точек с массами соответственно m, m, m, J в одномерном евклидовом пространстве, либо как движение одной точки массы m в трехмерном и одной точки массы J в одномерном евклидовом пространстве.

Механическую систему с числом степеней свободы $n > 1$ назовем инерционным механизмом. Это название связано с тем, что такие системы часто (при $n = 2$) для передачи усилия между кинематически независимыми звеньями механизма за счет реакций кинематических связей – инерционных сил.

Итак, зная конструкцию механизма, после выбора обобщенных координат, т.е. множества Q выполняются следующие действия.

1. Определяются формулы вида (39), т.е. зависимость декартовых координат звеньев механизма от обобщенных координат.

2. Записываются выражение (40) для кинетической энергии, определив предварительно компоненты a_{ij} метрического тензора по формулам (41) и выражение (42) для потенциальной энергии упругих сил.

3. После определения обобщенных сил M_i составляется уравнения Лагранжа вида (46) и, исследуя решения уравнений, определяется свойства движения механизма с точки зрения геометра – внутренние свойства риманова пространства. Если у двух механизмов совпадают, при выбранных для каждого механизма обобщенных координатах, формы записи кинетической и потенциальной энергии и обобщенные силы, то и внутренние их свойства должны совпадать – попросту, семейства решений уравнений Лагранжа. Внешние же свойства – конструкция, движение звеньев, реакция связей – разумеется, могут отличаться в зависимости от различий формул (39).

Теперь наметим постановку задачи синтеза инерционного механизма с заданными свойствами. Для этого потребуется решить три обратные задачи.

1. Пусть задано множество Q , а в нем поле вектора формулой (48):

$$M_i = M_i(q^1, q^2, \dots, q^n), \quad (48)$$

и семейство путей формулой (49):

$$\{q\} = \{q^1(t), q^2(t), \dots, q^n(t)\}. \quad (49)$$

Требуется указать компоненты метрического тензора a_{ij} и потенциал упругих сил (42) так, чтобы любой путь семейства $\{q\}$ являлся бы решением уравнений Лагранжа (46).

2. По полученным компонентам метрического тензора или, что то же, по форме записи кинетической энергии (37), требуется указать натуральное число N в отображении $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. функции (36), доставляющие

переход от обобщенных координат к декартовым координатам материальной точки единичной массы.

3. Указать конструкцию механизма, т.е. совокупность материальных точек и тел, кинематические и упругие связи между ними так, чтобы соотношения (39) и (42) были бы выполнены.

Задача 1 связана с определением системы уравнений по ее заданным решениям (задача восстановления).

Задача 2 связана с определением изометрического погружения, полученного в результате решения задачи А риманова пространства в евклидово пространство подходящего (не обязательно меньшего) числа измерений.

Задача 3 чисто инженерная, связанная с выбором конструкции, обеспечивающей выполнение зависимостей (39) декартовых координат от обобщенных. При $n = 2$ это означает, что требуется построить механизм, положение в пространстве всех звеньев которого определялось бы, например, углами поворота ведущего и ведомого валов по соотношениям типа (39).

Число измерения вмещающего пространства \mathbb{R}^n связано с инженерными соображениями с точки зрения удобства конструирования; так, например, добавление в конструкцию лишнего маховика увеличивает размерность вмещающего пространства на единицу. Следовательно, неединственность реализации римановой метрики в виде поверхности в \mathbb{R} с инженерной точки зрения чрезвычайно полезна.

2.5. Синтез инерционных механизмов вращения

Рассмотрим голономную склерономную систему с двумя степенями свободы, реализованную в виде механизма с двумя вращающимися валами (рисунок 1).

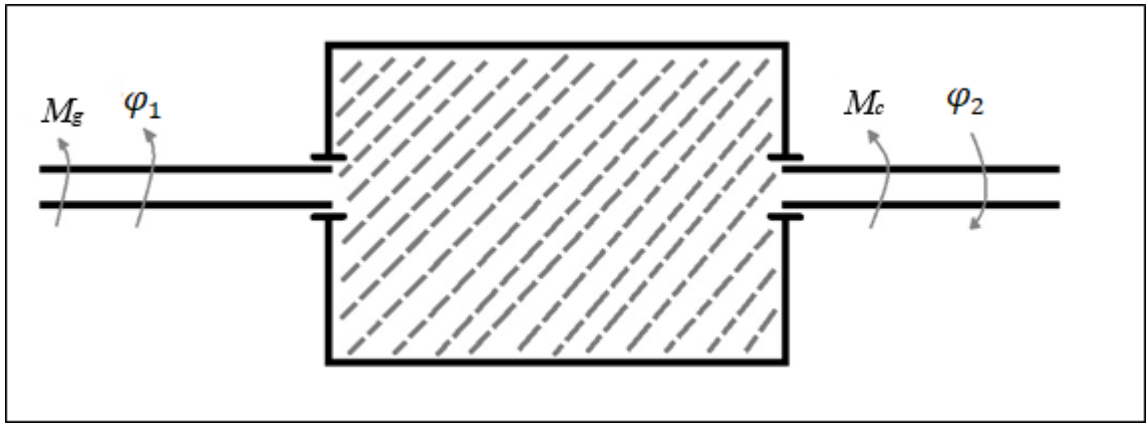


Рисунок 1 – Голономная склерономная система с двумя степенями свободы

Первый вал: ведущий, угол поворота обозначается φ_1 , обобщенная сила, действующая на него – момент сил двигателя M_g .

Второй вал: ведомый, угол поворота φ_2 , на него действует момент сил сопротивления $-M_c$, т.е. в направлении, противоположном направлению угла отсчета φ_2 . [7]

Положение остальных частей механизма (скрытые от наблюдателя непрозрачной поверхностью параллелепипеда, в котором оставлены отверстия для валов) определяются углами поворотов φ_1 и φ_2 . Параллелепипед считается неподвижным; детали механизма могут соединяться с валами и с поверхностью параллелепипеда.

Итак, обобщенными координатами являются множества (50):

$$q^1 = \varphi_1, q^2 = \varphi_2. \quad (50)$$

Составляющими обобщенной силы M_i служат множества (51):

$$\begin{aligned} M_1 &= M_g, \\ M_2 &= -M_c. \end{aligned} \quad (51)$$

В данном случае множество (52) определяется конструкцией механизма:

$$Q = \{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathcal{R}^2, \quad (52)$$

кинетическая энергия механизма имеет вид множества (53):

$$T = a_{11} \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + a_{12} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + a_{22} \frac{\dot{\varphi}_2^2}{2}, \quad (53)$$

где множества (54):

$$a_{ij} = a_{ij}(\varphi_1, \varphi_2), \quad i, j = 1, 2 \quad (54)$$

являются непрерывными функциями в Q и дважды непрерывно дифференцируемыми в некотором открытом (в Q) подмножестве $Q_1 \subset Q$, замыкание которого (в Q) совпадает с Q .

Считается также, что в Q_1 выполнены неравенства (55):

$$\begin{aligned} a_{11} &> 0, \\ a_{22} &> 0, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &> 0 \end{aligned} \quad (55)$$

(условие положительной определенности кинетической энергии).

Обозначим формулой (56):

$$u = u(\varphi_1, \varphi_2) \in C(Q) \cap C^2(Q_1) - \quad (56)$$

потенциал внутренних сил механизма (пружины, упругие силы и т.п.).

Уравнения движения сил имеют вид формул (57):

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{\varphi}_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + \frac{\partial a_{11}}{\partial \varphi_1} \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{\partial a_{11}}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \left(2 \frac{\partial a_{12}}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi_1} \right) \frac{\dot{\varphi}_2^2}{2} = \\ = - \frac{\partial u}{\partial \varphi_1} + M_g, \\ a_{12}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + \left(2 \frac{\partial a_{12}}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial a_{11}}{\partial \varphi_2} \right) \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi_2} \frac{\dot{\varphi}_2^2}{2} = \\ = - \frac{\partial u}{\partial \varphi_2} - M_c \end{aligned} \quad (57)$$

Введем обозначения (58):

$$\begin{aligned} \theta &= \varphi_1, \\ \alpha &= \varphi_1 - \varphi_2. \end{aligned} \quad (58)$$

Тогда кинетическая энергия имеет вид формулы (59):

$$T = a \frac{\dot{\theta}^2}{2} + b \dot{\theta} \dot{\alpha} + c \frac{\dot{\alpha}^2}{2}, \quad (59)$$

где:

$$a = a_{11} + 2a_{12} + a_{22}, b = -a_{12} - a_{22}, c = a_{22}, \quad (60)$$

и зависит только от α [8].

Механизм назовем соосным, если взаимное расположение его звеньев не меняется при повороте ведущего и ведомого валов на один и тот же угол (при этом в системе координат, вращающейся вместе с валом, сохраняются координаты любой точки механизма) [14].

Рассмотрим задачу: дана кинетическая энергия вида (59), коэффициенты которой суть функции координаты α .

Необходимое условие. Будем считать, что ось z декартовой системы координат xuz является осью вращения обоих (ведущего и ведомого) валов соосного механизма. Так как расположение звеньев механизма относительно друг друга зависит только от α , то декартовы координаты точки с номером k механизма, который можно считать состоящим из конечного числа материальных точек, определяются по формулам (61):

$$\begin{aligned} x_k &= r_k(\alpha)\cos(\theta + g_k(\alpha)), \\ y_k &= r_k(\alpha)\sin(\theta + g_k(\alpha)), \\ z_k &= z_k(\alpha), \end{aligned} \quad (61)$$

где θ – угол поворота ведущего вала, $r_k(\alpha)$ – расстояние от точки до оси z , $g_k(\alpha)$ – угол поворота точки (цилиндрические координаты). Предполагается, что $g_k(\alpha)$ и $z_k(\alpha)$ – непрерывно дифференцируемые на некотором промежутке функции.

Так как кинетическая энергия рассчитывается по формуле (59), причем выполняются неравенства (62):

$$\begin{aligned} a &= a(\alpha) > 0, \\ b &= b(\alpha), \\ c &= c(\alpha) > 0, \\ ac - b^2 &> 0, \end{aligned} \quad (62)$$

при этом выполняются равенства (63):

$$\begin{aligned}
a &= \sum_k m_k r_k^2; \\
b &= \sum_k m_k r_k^2 g'_k; \\
c &= \sum_k m_k (r_k^2 (g'_k)^2 + (r'_k)^2 + (z'_k)^2),
\end{aligned} \tag{63}$$

где m_k – масса точки с номером k , дифференцирование проводится по α .

Из (63) следует легко проверяемое условие (64):

$$ac - b^2 - \frac{1}{4}(a')^2 \geq 0. \tag{64}$$

Это неравенство и является необходимым условием соосности механизма.

Достаточное условие. Покажем, что неравенство (64) является также и достаточным условием для существования соосного механизма, т.е. при его выполнении существует система материальных точек с кинетической энергией (59). Более того, соосный механизм может быть реализован в виде одной материальной точки единичной массы. Действительно, положим формулу (65):

$$\begin{aligned}
g(\alpha) &= \int_0^\alpha \frac{b(\beta)}{a(\beta)} d\beta; \\
r &= r(\alpha) = \sqrt{a(\alpha)}; \\
z(\alpha) &= \int_0^\alpha \sqrt{\frac{a(\beta)c(\beta) - b^2(\beta) - \frac{1}{4}(a'(\beta))^2}{a(\beta)}} d\beta.
\end{aligned} \tag{65}$$

Теперь легко проверить, что материальная точка единичной массы, декартовы координаты x , y и z которой определены формулами (66):

$$\begin{aligned}
x &= r \cos(\theta + g(\alpha)), \\
y &= r \sin(\theta + g(\alpha)), \\
z &= z(\alpha),
\end{aligned} \tag{66}$$

имеет кинетическую энергию вида (59), удовлетворяющую условию (64). Формулы (66) задают изотермическое погружение риманова многообразия с метрикой: $ds^2 = 2Tdt^2 = ad\theta^2 + 2bd\theta d\alpha + cda^2$ в трехмерное евклидово пространство.

Соосный механизм всегда можно реализовать также в виде системы, состоящей из двух материальных точек единичной массы, совершающих плоскопараллельное движение в плоскости $z = 0$ (перпендикулярной оси вращения валов). Для этого положим формулы (67):

$$f = f(\alpha) = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{a(\beta)c(\beta) - b^2(\beta) - \frac{1}{4}(a'(\beta))^2}{a^2(\beta)}} d\beta;$$

$$r_1 = \sqrt{a(\alpha)} \cos f;$$

$$r_2 = \sqrt{a(\alpha)} \sin f;$$

$$g = g(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{b(\beta)}{a(\beta)} d\beta.$$
(67)

Координаты x_1, y_1, x_2, y_2 упомянутых точек определяются формулами (68):

$$x_1 = r_1 \cos(\theta + g(\alpha)),$$

$$y_1 = r_1 \sin(\theta + g(\alpha)),$$

$$x_2 = r_2 \cos(\theta + g(\alpha)),$$

$$y_2 = r_2 \sin(\theta + g(\alpha)).$$
(68)

Итак, при выполнении условий (62) неравенство (64) является необходимым и достаточным условием соосности механизма.

Поскольку $ac - b^2 > 0$, введем положительную величину (69):

$$\Gamma^2 = \frac{(a')^2}{4(ac - b^2)};$$

$$\left(\Gamma = -\frac{a'}{2\sqrt{ac - b^2}} \right).$$
(69)

Условие (64) соосности механизма эквивалентно условию (70):

$$\Gamma^2 \leq 1. \quad (70)$$

Рассмотрим случай, когда условие (70) не выполнено, но величина Γ^2 ограничена. Соосного механизма тогда не существует. Однако, если рассмотреть преобразование (71):

$$\theta = \lambda\psi, \quad \alpha = \alpha_1, \quad (71)$$

где для числа λ выполнено условие (72):

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{\sup \Gamma^2}}, \quad (72)$$

то кинетическая энергия (59) примет вид формулы (73):

$$T = \lambda^2 a \frac{\dot{\psi}^2}{2} + \lambda b \psi \dot{\alpha}_1 + c \frac{\dot{\alpha}_1^2}{2}. \quad (73)$$

Соответствующая величина $\tilde{\Gamma}^2$ имеет вид формулы (74):

$$\tilde{\Gamma}^2 = \frac{\lambda^2 (a')^2}{4(ac - b^2)} = \lambda^2 \Gamma^2 \leq \frac{\Gamma^2}{\sup} \Gamma^2 \leq 1 \quad (74)$$

и под знаком радикала в формулах вида (65) и (67) опять стоят неотрицательные выражения. Преобразование (71) означает, что ведущий вал передает вращение механизму через повышающий редуктор.

Итак, если величина Γ^2 ограничена, то можно синтезировать механизм, который отличается от соосного разве что наличием повышающего редуктора.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ И ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОГРАММЫ

3.1. Описание механизма

Рассмотрим механизм, изображенный на рисунке 2, состоящий из солнца, сателлита и эксцентрика, расположенного на сателлите.

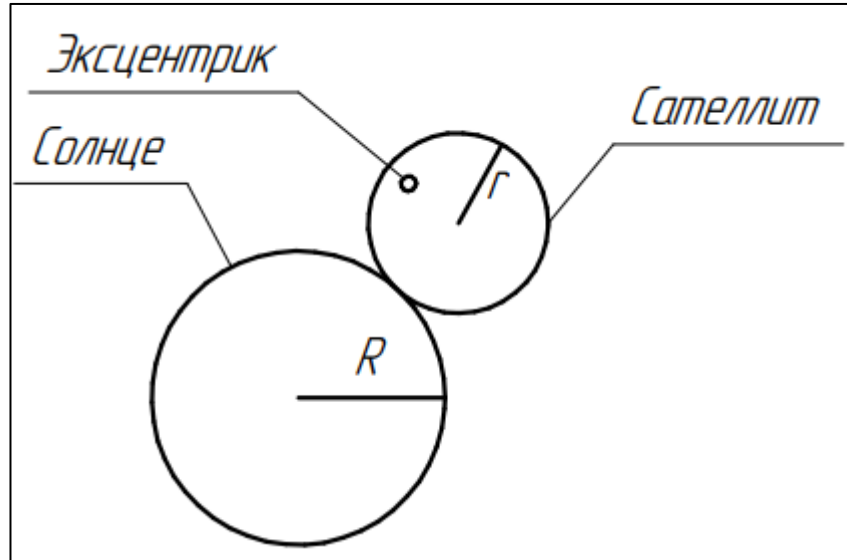


Рисунок 2 – Рассматриваемый механизм

Если твердое тело движется так, что ось вращения, проходящая через центр масс, сохраняет направление в пространстве, то его кинетическая энергия примет вид уравнения (75):

$$T = J_{\text{сол}} \frac{\dot{\theta}^2}{2} + J_{\text{сат}} \frac{(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} + m \frac{\dot{\alpha}^2}{2}, \quad (75)$$

где $J_{\text{сол}}$ – момент инерции солнца, $J_{\text{сат}}$ – момент инерции сателлита, m – масса эксцентрика.

Для работы, необходимо сначала определим моменты инерции $J_{\text{сол}}$ и $J_{\text{сат}}$ согласно заданным условиям. Момент инерции тонкого кольца с радиусом r и массой m можно вычислить по формуле $J = mr^2$. Предполагая, что масса распределена равномерно, и используя данное значение $m=1$, можно записать уравнения (76):

$$\begin{aligned} J_{\text{сол}} &= mR^2, \\ J_{\text{сат}} &= mr^2 + \frac{1}{3}m(R+r)^2. \end{aligned} \quad (76)$$

Движение описывается уравнениями Лагранжа второго рода (77):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= M_i, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= 0.\end{aligned}\tag{77}$$

Для решения данных уравнений воспользуемся языком программирования Python [20].

3.2. Реализация программы

Для получения запланированного результата будут использоваться следующие библиотеки:

- 1) `sympy` – для символьных вычислений [11];
- 2) `scipy.integrate` – для интегрирования дифференциальных уравнений [17];
- 3) `numpy` – для работы с массивами [18];
- 4) `matplotlib.pyplot` – для визуализации результатов [19].

Создание символов θ , α , t и функций $\theta_{dot}(t)$ и $\alpha_{dot}(t)$ задается в листинге 1 и позволяет манипулировать углами и временем как строительными блоками модели.

Листинг 1 – Определение символов

```
 $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $t$  = sp.symbols('θ α t')
 $\theta_{dot}$  = sp.Function('θ_dot')(t)
 $\alpha_{dot}$  = sp.Function('α_dot')(t)
 $\theta_{ddot}$  = sp.Derivative( $\theta_{dot}$ , t)
 $\alpha_{ddot}$  = sp.Derivative( $\alpha_{dot}$ , t)
```

В листинге 2 задаются параметры, такие как моменты инерции $J_{сол}$ и $J_{сат}$, массу m и внешний момент M_i , которые являются основой для расчета динамики системы.

Листинг 2 – Запись параметров

```
R = 10 # момент инерции солнца с радиусом 10
r = 5 # момент инерции сателлита радиусом 5
m = 1
M_i = 10
J_сол = m * R**2 # момент инерции солнца
J_сат = m * r**2 + m * ((R + r)**2) / 3 # момент инерции сателлита
```

Записывается уравнение кинетической энергии для механизма в листинге 3.

Листинг 3 – Уравнение кинетической энергии

```
T = J_сол * theta_dot**2 / 2 + J_кот * (theta_dot + alpha_dot)**2 / 2 + m * alpha_dot**2 / 2
```

Для дальнейшей работы программы необходимо вычислить производные. Код программы показан в листинге 4

Листинг 4 – Вычисление производных

```
dT_dtheta_dot = sp.diff(T, theta_dot)
dT_dalpha_dot = sp.diff(T, alpha_dot)
```

Определяются уравнения Лагранжа и решаются относительно θ_{ddot} и α_{ddot} в листинге 5.

Листинг 5 – Уравнения Лагранжа

```
L1 = sp.Derivative(dT_dtheta_dot, t) - sp.diff(T, theta) - M_i
L2 = sp.Derivative(dT_dalpha_dot, t) - sp.diff(T, alpha)
solutions = sp.solve([L1.doit(), L2.doit()], (theta_ddot, alpha_ddot), dict=True)
```

Использование функции `pendulum_equations` для численного решения дифференциальных уравнений показано в листинге 6, превращает абстрактные уравнения в конкретные результаты, которые можно наблюдать и анализировать.

Листинг 6 – Численное решение дифференциальных уравнений

```
# Интегрируем ускорения для получения скоростей и координат
theta_ddot_expr = solutions[0][theta_ddot]
alpha_ddot_expr = solutions[0][alpha_ddot]

# Функции для скоростей и координат (примерные, требуют численного интегрирования)
theta_dot_expr = sp.integrate(theta_ddot_expr, t)
alpha_dot_expr = sp.integrate(alpha_ddot_expr, t)
theta_expr = sp.integrate(theta_dot_expr, t)
alpha_expr = sp.integrate(alpha_dot_expr, t)

# Выводим выражения для скоростей и координат
print(f"theta_dot(t) = {theta_dot_expr}")
print(f"alpha_dot(t) = {alpha_dot_expr}")
print(f"theta(t) = {theta_expr}")
print(f"alpha(t) = {alpha_expr}")

# Начальные условия для численного интегрирования
initial_conditions = [0, 0, 0, 0] # theta, alpha, theta_dot, alpha_dot
# Параметры для передачи в функцию
params = (J_сол, J_кот, m, M_i)
```

```

# Временной интервал для интегрирования
time = np.linspace(0, 10, 250)

# Функция для системы дифференциальных уравнений
def pendulum_equations(state, t, J_сол, J_сот, m, M_i):
    theta, alpha, theta_dot, alpha_dot = state
    theta_ddot = theta_ddot_expr.subs({theta_dot: theta_dot, alpha_dot: alpha_dot})
    alpha_ddot = alpha_ddot_expr.subs({theta_dot: theta_dot, alpha_dot: alpha_dot})
    return [theta_dot, alpha_dot, theta_ddot, alpha_ddot]

# Численное решение системы дифференциальных уравнений
result = odeint(pendulum_equations, initial_conditions, time, args=params)

# Извлекаем результаты
theta_res, alpha_res, theta_dot_res, alpha_dot_res = result.T

```

Функции `angles_to_coordinates` и `angles_to_coordinates2` преобразуют углы в координаты x и y , давая возможность наблюдать движение в двух измерениях и приближая модель к реальности. Код программы показан в листинге 7.

Листинг 7 – Преобразование углов в координаты

```

def angles_to_coordinates(theta_res, alpha_res, L_1, L_2):
    x = L_1 * np.sin(theta_res) + L_2 * np.sin(theta_res + alpha_res)
    y = -L_1 * np.cos(theta_res) - L_2 * np.cos(theta_res + alpha_res)
    return x, y

def angles_to_coordinates2(theta_res, alpha_res, L_2):
    x = L_2 * np.sin(alpha_res) + L_2 * np.sin(theta_res + alpha_res)
    y = +L_2 * np.cos(alpha_res) + L_2 * np.cos(theta_res + alpha_res)
    return x, y

# Преобразование углов в координаты
x_res, y_res = angles_to_coordinates(theta_res, alpha_res, L_1, L_2)

x_res2, y_res2 = angles_to_coordinates2(theta_res, alpha_res, L_2)

```

В листинге 8 строится график движения двух тел по рассчитанным ранее координатам x и y (рисунок 3). Для этого используются библиотеки Python, такие как Matplotlib и NumPy.

Листинг 8 – Построение графиков

```

# Построение графиков координат
plt.figure(figsize=(12, 6))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(x_res, y_res, label='Солнце')
plt.plot(x_res2, y_res2, label='Сателлит')
plt.title('Координата x')
plt.xlabel('Время t')
plt.ylabel('Координата x')
plt.grid()

```

```
plt.legend()  
plt.tight_layout()  
plt.show()
```

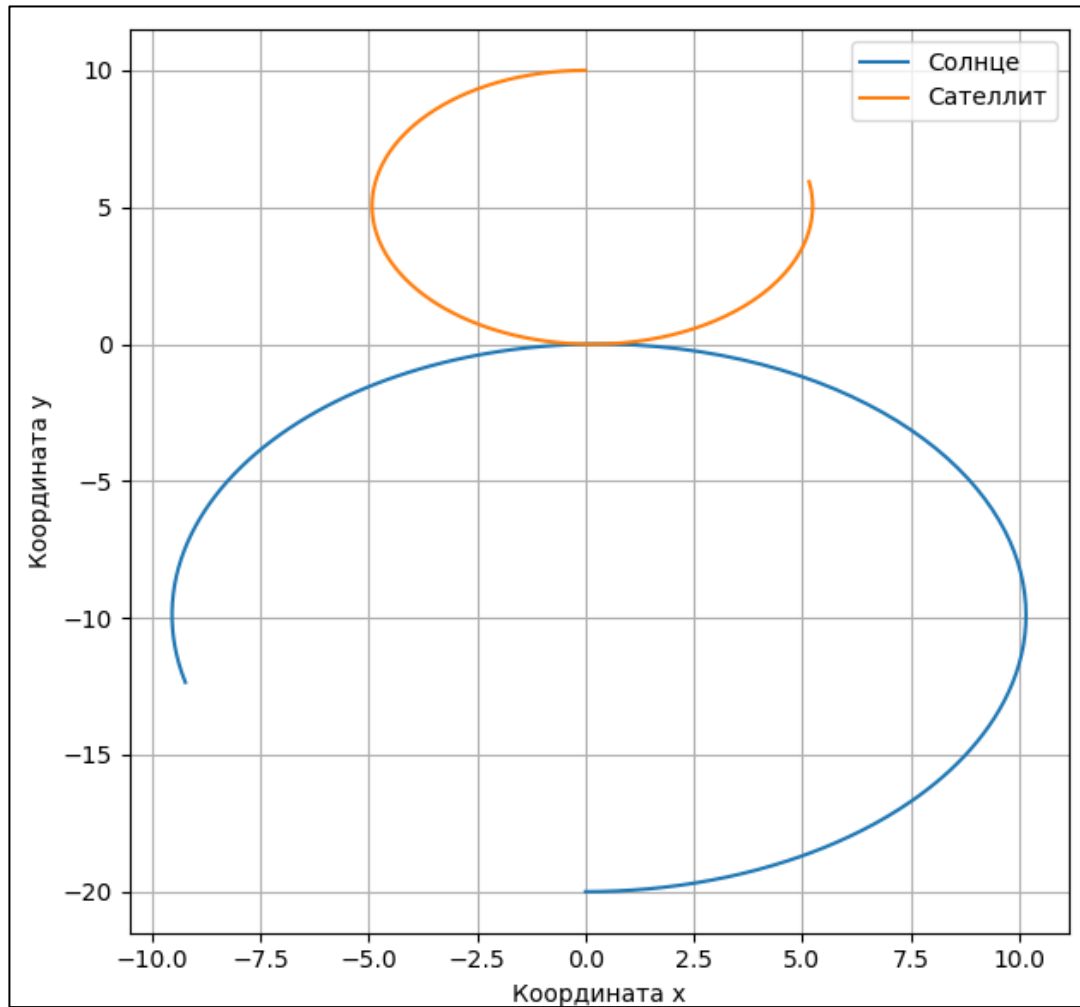


Рисунок 3 – Отображение рассчитанных координат x и y

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках выпускной квалификационной работы была разработана компьютерная модель инерционного механизма вращения. Предметная область была тщательно изучена, что позволило создать основу для разработки математической модели. Математическая модель была реализована с использованием современных методов символьных и численных вычислений, что обеспечило точность и надежность результатов.

Компьютерная модель, разработанная на основе математической, демонстрирует важные аспекты динамики вращения и может быть использована для дальнейшего анализа и оптимизации инерционных механизмов. Эта модель не только подтверждает теоретические расчеты, но и предоставляет платформу для визуализации и интуитивного понимания сложных физических процессов.

Результаты данной работы имеют широкий спектр применений в различных областях, включая, но не ограничиваясь, машиностроением, аэрокосмической индустрией и робототехникой. Эти результаты могут оказаться полезными для проектирования и оптимизации инерционных механизмов в различных сферах промышленности. Более того, они могут служить отправной точкой для будущих исследований и разработок в области инерционных систем и механизмов, поскольку представляют собой значительный вклад в понимание и улучшение работы таких систем. Таким образом, данная работа может способствовать развитию технологий и прогрессу в инженерной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артемьева Е.А., Денисов Ю.В. Кинематика и динамика инерционных приборов. // *Фундаментальные исследования*, 2014 – С. 2571 – 2574.
2. Большой энциклопедический политехнический словарь. [Электронный ресурс] URL: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/polytechnic/8146/СА-ТЕЛЛИТ> (дата обращения: 05.05.2024 г.).
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 2. Динамика системы материальных точек. – Издательский центр «Лань», 2022. – С. 69–100.
4. Ветренко В.И., Романова Т.И. Инерционный двигатель. Приборостроение, 2017 – 5 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – Издательский центр «Наука», 1966. – С. 41–51.
6. Геренштейн А.В., Ахметшин Н.И., Гоц Э.М. Исследование динамики инерционно–импульсного механизма планетарного типа с упругими элементами. // V Всесоюзная научно – техническая конференция по вариаторам и передачам гибкой связью: сб. тез.докл. – Одесса, 1976. – 7 с.
7. Геренштейн А.В., Геренштейн Е.А., Новик М.Г. Связь изометрических погружений с задачами синтеза инерционных механизмов. // 75-я Научная конференция «Наука ЮУРГУ. Секции естественных наук», 2023. – С. 91–96.
8. Геренштейн А.В., Геренштейн Е.А., Новик М.Г. Синтез инерционных механизмов вращения. // 74-я Научная конференция «Наука ЮУРГУ. Секции естественных наук», 2022. – С. 46–49.
9. Крайнев А.Ф. Механика машин. Фундаментальный словарь. – М. Машиностроение, 2000. – 904 с.
10. Лысенко В.С., Пралиев С.Ж., Сулейменов Б.Т., Баубеков С.Д. Анализ инерционного механизма // *Современные наукоемкие технологии*. – 2012 – № 12 – С. 20–23.

11. Математическая библиотека Python SymPy. [Электронный ресурс] URL: <https://pythonru.com/biblioteki/sympy-v-python> (дата обращения: 16.03.2024 г.).
12. Основы компьютерного моделирования [Электронный ресурс] URL: http://ggpi.org/metod/kaf_d_ph/komp_model/kom-mod.html (дата обращения: 10.02.2024 г.).
13. Пожбелко В.И. Инерционно-импульсные приводы машин с динамическими связями. – М.: Машиностроение, 1989 – 137 с.
14. Соосный мотор-редуктор. [Электронный ресурс] URL: <https://cable.ru/articles/2239-soosnyj-reduktor> (дата обращения: 15.04.2024 г.).
15. Черкасов В.Г., Петухова И.И. Теоретическая механика. – Издательский центр «Забайкальский государственный университет», 2015. – С. 61–65.
16. Цивинский С.В. Универсальный инерционный движитель для различных видов транспорта и способ его получения. // Машиностроение и машиноведение, 2009 – 10 с.
17. Integration (scipy.integrate). [Электронный ресурс] URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/integrate.html> (дата обращения: 20.03.2024 г.).
18. NumPy. [Электронный ресурс] URL: <https://pythonworld.ru/numpy/1.html> (дата обращения: 17.03.2024 г.).
19. Matplotlib.pyplot. [Электронный ресурс] URL: https://matplotlib.org/3.5.3/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.html (дата обращения: 07.03.2024 г.).
20. Python. [Электронный ресурс] URL: <https://www.python.org> (дата обращения: 01.03.2024 г.).