Единицы целочисленных групповых колец циклических групп порядков $3p$, где $p \geqslant 5$ — простое число

Алеев Р.Ж., Алеева В.Н.
Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинский госуниверситет, Челябинск, Россия
Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинск, Россия
aleevrz@susu.ru, aleevavn@susu.ru

В силу работ [1–3] естественно изучать единицы целочисленных групповых колец циклических групп порядков kp, где $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ и $p \geqslant 5$ — простое число.

Здесь рассмотрим единицы целочисленных групповых колец циклических групп порядков $3p$ для простого $p \geqslant 5$.

Обозначим через α — примитивный (первообразный) комплексный корень из единицы степени $3p$. Пусть $G = \langle x \rangle$ — циклическая группа порядка $3p$. Для каждого числа $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 3p-1\}$ определим *характер* группы G

$$\chi_j : G \to \langle \alpha \rangle,$$

где для любого $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 3p-1\}$

$$\chi_j(x^k) = \alpha^{jk}.$$

Обозначим через $\Phi(3p)$ — множество всех натуральных чисел, не превосходящих $3p$ и взаимно простых с $3p$.

Лемма 1. *Множество* $\mathrm{Irr}(G)$ *всех неприводимых характеров группы* G *разбивается на следующие классы алгебраически сопряжённых характеров.*

1. $\mathrm{Irr}(\chi_0) = \{\chi_0 = 1_G\}$.
2. $\mathrm{Irr}(\chi_p) = \{\chi_p, \chi_{2p}\}$.
3. $\mathrm{Irr}(\chi_3) = \left\{\chi_3, \chi_6, \ldots, \chi_{3(p-1)}\right\}$.
4. $\mathrm{Irr}(\chi_1) = \{\chi_j \mid j \in \Phi(3p)\}$.

Пусть

$$\mathrm{Irr}(G, alc) = \{\chi_0, \chi_p, \chi_3, \chi_1\}.$$

Для $\chi \in \mathrm{Irr}(G, alc)$ обозначим через $\mathbf{Q}(\chi)$ — поле характера χ, а через $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\chi])$ — группу единиц кольца целых этого поля.

Согласно [4] *локальным элементом* рациональной групповой алгебры $\mathbf{Q}G$, соответствующим характеру $\chi \in \mathrm{Irr}(G, alc)$ и элементу $\mu \in \mathbf{Q}(\chi)$, называется элемент

$$u_\chi(\mu) = 1 + \sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(\chi))} (\varphi(\mu) - 1)\, e(\varphi(\chi)),$$

где $e(\varphi(\chi))$ — минимальный идемпотент, соответствующий характеру $\varphi(\chi)$.

Пусть g — примитивный (первообразный) корень по модулю p. Обозначим

$$\mu_0 = \frac{1 - (\alpha^3)^g}{1 - \alpha^3} = 1 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{3(g-1)}.$$

Для любого $m \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ определён такой автоморфизм ψ_m поля $\mathbf{Q}(\chi_p)$, что $\psi_m(\alpha^3) = \alpha^{3m}$.

Лемма 2. *Существует такое натуральное число* r*, что для любого*
$k \in \{0, 1, \ldots, (p-5)/2\}$

$$u_{\chi_3}(\psi_{g^k}(\mu_0^{(p-1)r})) \in \mathbf{Z}G.$$

Лемма 3. *Существует такое натуральное число l, что для любого $k \in \{1, 2, \ldots, 3p-1\}$*

$$u_{\chi_1}\left((1-\alpha^k)^l\right) \in \mathbf{Z}G.$$

Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G, alc)$. Определим подгруппу

$$U(\chi) = \langle u_\chi(\mu) \mid \mu \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\chi])\rangle$$

из локальных единиц рациональной групповой алгебры $\mathbf{Q}G$.

Теорема.

1. *Группа единиц $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G)$ целочисленного группового кольца группы G — подгруппа в*

$$U = \langle -1\rangle \times U(\chi_0) \times U(\chi_p) \times U(\chi_3) \times U(\chi_1).$$

2. *Существует такое подмножество $A \subset \{1, 2, \ldots, 3p-1\}$ мощности $p-2$, что для определённых в леммах 2 и 3 чисел r и l имеем*

$$\prod_{k=0}^{(p-5)/2} \langle u_\chi(\psi_{g^k}\mu_0^{(p-1)r})\rangle \times \prod_{a\in A}\langle u_{\chi_1}\left((1-\alpha^a)^l\right)\rangle$$

является подгруппой конечного индекса в $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G)$ и U.

Список литературы

[1] G. Higman, The units of group rings. *Proc. London Math. Soc(2).*, **46**: 1 (1940), 231–248.

[2] Р. Ж. Алеев, Круговые единицы в групповых кольцах конечных абелевых групп. *Алгебра и логика: Материалы международного российско-китайского семинара.* Иркутск: Издательство Иркут. гос. пед. ун-та, 2007, 11–14.

[3] Р. Ж. Алеев, С. А. Колясников, Круговые единицы групповых колец циклических групп простого порядка. *Наука ЮУрГУ: материалы 65-й научной конференции. Том: Секции естественных наук.* Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013, 23–26.

[4] Р. Ж. Алеев, Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп. *Матем. труды*, **3**: 1(2000), 3–37.