Единицы целочисленных групповых колец циклических групп

Алеев Р.Ж., Алеева В.Н.
Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинский госуниверситет, Челябинск, Россия
Южно-Уральский госуниверситет (НИУ), Челябинск, Россия
aleevrz@susu.ru, aleevavn@susu.ru

Прежде всего отметим, что целочисленное групповое кольцо бесконечной циклической группы может быть отождествлено к кольцом многочленов Лорана с целыми коэффициентами. Стандартные методы комплексного анализа дают, что в этом случае обратимы только тривиальные элементы. Поэтому будут рассматриваться только *конечные* циклические группы.

Итак, пусть $G = \langle x \rangle$ — циклическая группа порядка n. Обозначим через α — примитивный (первообразный) комплексный корень из единицы степени n. Для каждого числа $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ определим *характер* группы G

$$\chi_j : G \to \langle \alpha \rangle,$$

где $\chi_j(x^k) = \alpha^{jk}$ для любого $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. При распространении по линейности главного характера $\chi_0 = 1_G$ на целочисленное групповое кольцо $\mathbf{Z}G$) группы G возникает кольцевой гомоморфизм на $\mathbf{Z}$. Если его ограничить на группу единиц $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G)$ кольца $\mathbf{Z}G$, то получим гомоморфизм групп на группу единиц $\{1, -1\}$ кольца $\mathbf{Z}$, ядро которого обозначается как $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ и называется *нормализованной* группой единиц кольца$\mathbf{Z}G$).

Лемма 1. $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}G) = \langle -1 \rangle \times \mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$.

Соглашение. *Поэтому достаточно рассматривать* $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$.

Теорема. [1]

1. $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G) = \langle x \rangle \times V_1 \times \dots V_r$, *где* $V_1, \dots, V_r$ *— бесконечные циклические подгруппы.*

2. $r = \left[\frac{n}{2}\right] - \tau(n) + 1 = \begin{cases} \frac{n+1}{2} - \tau(n) & \text{для нечётного } n, \\ \frac{n}{2} - \tau(n) + 1 & \text{для чётного } n, \end{cases}$
где $\tau(n)$ *— число натуральных делителей числа* n.

В работах [1] и [2] получены полные описания групп единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 10, 12 и 7, 9.

Для натурального числа m обозначим через $\Phi(m)$ — множество всех натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m.

Лемма 2. *Множество* $\mathrm{Irr}(G)$ *всех неприводимых характеров группы* G *разбивается на классы алгебраически сопряжённых характеров:*

$$\mathrm{Irr}(G) = \{\mathrm{Irr}(\chi_0) = \{\chi_0\}\} \bigcup_{d|n} \{\mathrm{Irr}(\chi_d) = \{\chi_{dk} \mid k \in \Phi(n/d)\}\}.$$

Пусть $\mathrm{Irr}(G, alc) = \{\chi_0, \chi_d \mid d|n\}$. Для $\chi \in \mathrm{Irr}(G, alc)$ обозначим через $\mathbf{Q}(\chi)$ — поле характера χ, а через $\mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\chi])$ — группу единиц кольца целых этого поля. Согласно [3] *локальным элементом* рациональной групповой алгебры $\mathbf{Q}G$, соответствующим характеру $\chi \in \mathrm{Irr}(G, alc)$ и элементу $\mu \in \mathbf{Q}(\chi)$, называется элемент

$$u_\chi(\mu) = 1 + \sum_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}(\chi))} (\varphi(\mu) - 1)\, e(\varphi(\chi)),$$

где $e(\varphi(\chi))$ — минимальный идемпотент, соответствующий характеру $\varphi(\chi)$.

Для описания единиц целочисленных групповых колец циклических групп используются локальные элементы, построенные по единицам $\mu \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\chi])$ и характерам $\chi \in \mathrm{Irr}(G, alc)$.

В работах [4–8] изучались единицы целочисленных групповых колец циклических 2-групп. В частности, полностью описаны [6] единицы целочисленного группового кольца циклической группы порядка 16. Также разработан индуктивный подход к описанию единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп, на основе которого получаются описания подгрупп конечного индекса в группах единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп.

В 1940 Хигманом [9] было показано, что целочисленные групповые кольца циклических групп порядков 1, 2, 3, 4 и 6 имеют только тривиальные единицы. В работах [10,11] были изучены единицы целочисленных групповых колец циклических групп простых порядков. Естественный следующий следующий шаг состоит в изучении единицы целочисленных групповых колец циклических групп порядков kp, где $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ и $p \geqslant 5$ — простое число. Такие числа kp будем называть *близкими к простым.*

В настоящее время изучаются единицы целочисленных групповых колец циклических групп порядков $2p$ и $3p$ для простого $p \geqslant 5$. В частности, построены подгруппы конечного в группах единиц целочисленных групповых колец циклических групп таких порядков.

Список литературы

[1] R. Ž. Aleev, Higman's theory of central units, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers. *Intern. Journ. Alg. Comp.*, **4**: 3 (1994), 309–358.

[2] Р. Ж. Алеев, Г. А. Панина, Единицы циклических групп порядков 7 и 9, *Известия ВУЗОВ. Математика*, 11(450) (1999), 81–84.

[3] Р. Ж. Алеев, Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп. *Матем. труды*, **3**: 1 (2000), 3–37.

[4] Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Е. А. Христенко, Сравнение по модулю 2 круговых единиц в полях $\mathbf{Q}_{16}$ и $\mathbf{Q}_{32}$. *Челяб. физ.-мат. журн.* **1**: 4 (2016), 8–29.

[5] Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Т. А. Ханенко, Нахождение единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32. *Челяб. физ.-мат. журн.* **1**: 4 (2016), 30–55.

[6] Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Т. А. Ханенко, Описание группы единиц целочисленного группового кольца циклической группы порядка 16. *Тр. ИММ УрО РАН*, **23**: 4 (2017), 32–42.

[7] Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Т. А. Ханенко, Локальные единицы целочисленного группового кольца циклической группы порядка 64 для характера с полем характера $\mathbf{Q}_{64}$. *Челяб. физ.-мат. журн.* **3**:3 (2018), 253–275.

[8] R. Zh. Aleeev, O. V. Mitina, A. D. Godova, Units of integral group rings of cyclic 2-groups. arXiv:2109.00717 [math.GR].

[9] G. Higman, The units of group rings. *Proc. London Math. Soc(2).*, **46**: 1 (1940), 231–248.

[10] Р. Ж. Алеев, Круговые единицы в групповых кольцах конечных абелевых групп. *Алгебра и логика: Материалы международного российско-китайского семинара.* Иркутск: Издательство Иркут. гос. пед. ун-та, 2007, 11–14.

[11] Р. Ж. Алеев, С. А. Колясников, Круговые единицы групповых колец циклических групп простого порядка. *Наука ЮУрГУ: материалы 65-й научной конференции. Том: Секции естественных наук.* Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013, 23–26.