

На правах рукописи



ЕРШОВА Арина Владимировна

**ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИЛЬНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ**

05.13.17 – теоретические основы информатики

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Челябинск – 2012

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений и динамических систем
ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет»
(национальный исследовательский университет)

- Научный руководитель:** СОКОЛИНСКАЯ Ирина Михайловна
кандидат физ.-мат. наук, доцент
доцент кафедры дифференциальных уравнений и динамических систем, ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет)
- Официальные оппоненты:** УХОБОТОВ Виктор Иванович
доктор физ.-мат. наук, профессор
зав.кафедрой теории управления и оптимизации, ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»
- ОЛЕНЕВ Николай Николаевич
кандидат физ.-мат. наук, доцент
старший научный сотрудник отдела «Математическое моделирование экономических систем», ФГБУН Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук (ВЦ РАН)
- Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН)
(г. Екатеринбург)

Защита состоится 15 июня 2012 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.298.18 при ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет) по адресу: 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, ауд. 1001.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южно-Уральского государственного университета.

Автореферат разослан “ _____ ” _____ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



М.Л. Цымблер

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Создание вычислительных машин и связанное с этим ускоренное развитие математических теорий, в том числе математической кибернетики и дискретной математики позволило ставить и решать на ЭВМ новые задачи, до недавнего времени находившиеся исключительно в компетенции человека. Одной из таких фундаментальных задач является рассматриваемая в настоящей работе задача распознавания образов. В общем виде эта задача может быть сформулирована следующим образом: необходимо отнести предъявленный объект, определяемый некоторой совокупностью своих признаков, к одному из нескольких непересекающихся классов–образов. В том или ином виде данная задача решается человеком практически во всех сферах его деятельности.

Задача сильной отделимости имеет большое значение теоретического и прикладного характера в распознавании образов, включающем задачи дискриминации, классификации и др. Хорошо известен итерационный метод решения задачи сильной отделимости, использующий операцию проектирования. Однако на практике применение этого метода существенно ограничивается тем, что далеко не всегда удается построить конструктивную формулу для вычисления проекции точки на выпуклое множество. Поэтому целесообразно заменить операцию проектирования последовательностью фейеровских отображений.

Алгоритмы разделения выпуклых многогранников на базе фейеровских отображений обладают тем преимуществом по сравнению с другими известными методами, что они применимы к нестационарным задачам, то есть к задачам, в которых исходные данные могут меняться в процессе решения задачи. Примерами таких нестационарных задач являются, например, задача о портфеле ценных бумаг, задача о спам-фильтре и задачи классификации в метеорологии.

При решении практических задач распознавания образов часто встречаются задачи с большим количеством переменных и ограничений. Подобные задачи при решении требуют значительных вычислительных мощностей. В связи с этим возникает необходимость разработки параллельного алгоритма разделения выпуклых многогранников с помощью фейеровских отображений, допускающего эффективную реализацию на многопроцессорных системах с массовым параллелизмом.

В соответствие с этим актуальной является задача разработки, анализа и реализации на ЭВМ масштабируемых методов и алгоритмов решения задачи сильной отделимости двух выпуклых непересекающихся многогранников на базе фейеровских отображений.

Цель и задачи исследования. *Цель* данной работы состояла в разработке итерационных методов и алгоритмов решения нестационарных задач сильной отделимости двух выпуклых непересекающихся многогранников, допускающих эффективное распараллеливание на многопроцессорных системах с массовым параллелизмом. Для достижения этой цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Описать общий подход к решению задачи сильной отделимости двух выпуклых многогранников на основе последовательных проектирований.
2. На базе данного подхода разработать масштабируемый метод решения задачи сильной отделимости с использованием фейеровских отображений для построения псевдопроекции, обобщающих операцию проектирования, и исследовать устойчивость этого метода.
3. Разработать алгоритм построения псевдопроекции, допускающий эффективное распараллеливание на многопроцессорных системах с массовым параллелизмом, и исследовать его сходимость.

4. Спроектировать и реализовать программный комплекс для решения задачи сильной отделимости, использующий разработанные методы и алгоритмы. Провести вычислительные эксперименты для анализа эффективности предложенного подхода.

Методы исследования. Исследования, проводимые в настоящей диссертационной работе, опираются на теорию фейеровских отображений академика И.И. Еремина и теорию нестационарных процессов, развитую И.И. Ереминым и Вл.Д. Мазуровым. Для построения алгоритмов и доказательства теорем также использовался математический аппарат, в основе которого лежат теория множеств, теория алгоритмов, линейная алгебра, теория линейных неравенств и теория распознавания образов.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Предложен новый итерационный метод решения задачи сильной отделимости двух выпуклых многогранников, базирующийся на делении вектора на подвекторы, и допускающий эффективную реализацию на многопроцессорных многоядерных вычислительных системах с массовым параллелизмом.
2. На основе предложенного метода разработан новый параллельный алгоритм, для которого доказаны теоремы сходимости и устойчивости, обосновывающие возможность эффективного применения этого алгоритма для решения нестационарных задач сильной отделимости на базе фейеровских отображений.
3. Впервые выполнена реализация разработанного алгоритма решения задачи сильной отделимости двух выпуклых многогранников в виде программного комплекса для многопроцессорных систем на основе стандарта MPI-2, и проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенных подходов.

Теоретическая ценность работы состоит в том, что в ней дано формальное описание масштабируемого метода решения задачи сильной отделимости, для которого доказаны сходимость и устойчивость.

Практическая ценность работы заключается в том, что предложенный метод реализован в виде программного комплекса для супер-ЭВМ, позволяющего эффективно решать нестационарные задачи сильной отделимости в различных предметных областях.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы, разработанные методы, алгоритмы и результаты вычислительных экспериментов докладывались автором на следующих международных и всероссийских научных конференциях:

- на Международной конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (1–6 сентября 2008 г., г. Екатеринбург);
- на Международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2010)» (29 марта – 2 апреля 2010 г., г. Уфа);
- на XVIII Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» (25 мая – 1 июня 2010 г., г. Новороссийск);
- на Международной научной конференции «Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи» (20–25 сентября 2010 г., г. Новороссийск);
- на XIV Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения" (28 февраля – 4 марта 2011 г., г. Екатеринбург);
- на Международной научной конференции «Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее» (19–24 сентября 2011 г., г. Новороссийск);
- на Международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2012)» (26–30 марта 2012 г., г. Новосибирск).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 печатных работ, причем работы [1 – 4] опубликованы в журналах, включенные ВАК в перечень журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук. Получено 3 свидетельства Роспатента об официальной регистрации программ для ЭВМ. В совместных работах научному руководителю И.М. Соколинской принадлежит постановка задачи, А.В. Ершовой принадлежат все полученные результаты.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографии. Объем диссертации составляет 97 страниц, объем библиографии – 92 наименования.

Содержание работы

Во введении приводится обоснование актуальности темы, формулируются цели работы, ее новизна и практическая значимость; приводится обзор работ по тематике исследования и кратко излагается содержание диссертации.

В первой главе, «Распознавание образов и фейеровские отображения», дается классификация основных задач распознавания, к которым относится задача сильной отделимости. Приводятся базовые теоремы, касающиеся задачи отделимости непересекающихся многогранников. Рассматриваются основные положения теории фейеровских отображений и процессов, являющихся обобщением операции проектирования.

Определение 1. Пусть $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$. Отображение φ называется *M-фейеровским*, если

$$\varphi(y) = y, \quad \forall y \in M; \quad \|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|, \quad \forall y \in M, \quad \forall x \notin M.$$

Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_k\} \cap M = \emptyset$ называется *M-фейеровской*, если $\|x_{k+1} - y\| < \|x_k - y\|$, $\forall k, \forall y \in M$.

Тип 1 (однозначное фейеровское отображение). Пусть в \mathbb{R}^n задана конечная система линейных неравенств

$$Ax \leq b: l_j(x) = (a_j, x) - b_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где $a_j \neq 0$ для любого j . Определим $l_j^+(x) = \max\{l_j(x), 0\}$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда *фейеровское отображение первого типа* имеет вид:

$$\phi(x) = x - \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \frac{l_j^+(x)}{\|a_j\|^2} a_j \quad (2)$$

для любой системы положительных коэффициентов $\{\alpha_j > 0\}$, $j = 1, \dots, m$, таких, что

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1 \text{ и коэффициентов релаксации } 0 < \lambda_j < 2.$$

Тип 2 (многозначное фейеровское отображение) Сконструируем *фейеровское отображение второго типа* следующим образом:

$$\psi(x) = x - \lambda \frac{\max_{(j)} l_j^+(x)}{\|a_{j_x}\|^2} a_{j_x}, \quad (3)$$

где j_x – любой из индексов, на котором достигается $\max_{(j)} l_j^+(x)$, $0 < \lambda < 2$ – коэффициент релаксации.

В завершение главы 1 дается аналитический обзор известных методов решения задачи сильной отделимости.

Во второй главе, «Метод псевдопроекций», строится новый масштабируемый метод решения задачи сильной отделимости для двух выпуклых непересекающихся многогранников, задаваемых системами линейных неравенств.

Пусть даны два выпуклых непересекающихся многогранника $M \subset \mathbb{R}^n$ и $N \subset \mathbb{R}^n$, заданные системами линейных неравенств:

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset; \\ N &= \{x \mid Bx \leq d\} \neq \emptyset; \\ M \cap N &= \emptyset. \end{aligned} \quad (4)$$

Задача сильной отделимости – это задача нахождения слоя наибольшей толщины (π -слоя), разделяющего M и N . Сильная отделимость, по существу, эквивалентна задаче отыскания расстояния между M и N в смысле метрики

$$\rho(M, N) = \min \{ \|x - y\| \mid x \in M, y \in N \}. \quad (5)$$

Если $\bar{x} \in M$ и $\bar{y} \in N$ являются \arg -точками задачи (5), то есть $\rho(M, N) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$, то слоем наибольшей толщины, разделяющим множества M и N , является $P := \{x \mid x \in P_1 \cap P_2\}$, где P_1 и P_2 – полупространства, задаваемые линейными неравенствами

$$\langle x - \bar{x}, \bar{x} - \bar{y} \rangle \leq 0 \quad \text{и} \quad \langle y - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y} \rangle \geq 0.$$

Таким образом, в краткой форме задачу сильной отделимости можно записать так:

$$\{\bar{x}, \bar{y}\} \in \text{Arg min} \{ \|x - y\| \mid x \in M, y \in N \}. \quad (6)$$

Задача сильной отделимости может быть решена с помощью известного *метода последовательного проектирования*, на основе которого можно построить итерационный алгоритм на базе операции проектирования. Однако, если M и N – произвольные многогранники, то этот алгоритм не может быть признан эффективным, так как не известен универсальный конструктивный метод построения проекции точки на многогранник. Ситуацию можно исправить, если вместо операции проектирования использовать фейеровские отображения.

Пусть задано однозначное отображение $\varphi \in \mathbf{F}_M$. Под степенью $\varphi^s(x)$ отображения $\varphi(x)$ будем понимать его последовательное применение s раз, то есть

$$\varphi^s(x) = \underbrace{\varphi \dots \varphi}_s(x).$$

Под *фейеровским процессом*, порождаемым однозначным фейеровским отображением φ при произвольном начальном приближении $x_0 \in \mathbb{R}^n$, будем понимать последовательность $\{\varphi^s(x_0)\}_{s=0}^{+\infty}$. Известно, что, в случае, когда однозначное M -фейеровское отображение φ является непрерывным, фейеровский процесс сходится к точке, принадлежащей множеству M :

$$\{\varphi^s(x_0)\}_{s=0}^{+\infty} \rightarrow \bar{x} \in M.$$

Для сходящегося фейеровского процесса при произвольном начальном приближении x_0 введем следующее обозначение

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^s(x_0) = \bar{x}.$$

Это означает, что для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует целое неотрицательное число S такое, что для всех $s > S$ имеем $\|x_s - \bar{x}\| < \varepsilon$.

Определение 2. Пусть задано однозначное непрерывное отображение $\varphi \in \mathbf{F}_M$. Под φ -проектированием (псевдопроектированием) точки $x \in \mathbb{R}^n$ на множество M будем понимать отображение $\pi_M^\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow M$, задаваемое соотношением

$$\pi_M^\varphi(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^s(x).$$

Точку $\pi_M^\varphi(x)$ будем называть *псевдопроекцией* точки x на множество M .

Пусть в контексте задачи сильной отделимости (б) заданы два однозначных непрерывных фейеровских отображения: $\varphi \in \mathbf{F}_M$, $\psi \in \mathbf{F}_N$. Используя операции φ - и ψ -проектирования, можно построить следующий алгоритм \mathfrak{F} , решающий задачу сильной отделимости с использованием фейеровских отображений. Пусть задано произвольное начальное приближение $w_0 \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем положительное вещественное число ε .

Алгоритм \mathfrak{F} состоит из следующих шагов:

Шаг 0. $k := 0$.

Шаг 1. $x_{k+1} := \pi_M(w_k)$.

Шаг 2. $y_{k+1} := \pi_N(w_k)$.

Шаг 3. $w_{k+1} := \frac{x_{k+1} + y_{k+1}}{2}$.

Шаг 4. $k := k + 1$.

Шаг 5. Если $\min\{\|x_{k+1} - x_k\|, \|y_{k+1} - y_k\|\} \geq \varepsilon$, перейти на шаг 1.

Шаг 6. Стоп.

При реализации итерационных алгоритмов в виде программ для ЭВМ большое значение имеют вопросы устойчивости. Особенно важно это для нестационарных задач. Пусть задана система линейных неравенств в пространстве \mathbb{R}^n :

$$Ax \leq b. \quad (7)$$

Пусть $y = [A, b]$ – *информационный вектор*, задающий все параметры системы (7), $y \in \mathbb{R}^{nm+m}$. Обозначим через M_y многогранник решений системы (7), определяемой информационным вектором y . Имеем $M_y \subset \mathbb{R}^n$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $\bar{y} \in \mathbb{R}^{nm+m}$ – информационный вектор, задающий устойчиво совместную систему неравенств

$$\bar{A}x \leq \bar{b}.$$

Тогда существует некоторая окрестность V точки \bar{y} , такая, что любая точка $\tilde{y} \in V$ также определяет устойчиво совместную систему неравенств

$$\tilde{A}x \leq \tilde{b},$$

где $\tilde{y} = [\tilde{A}, \tilde{b}]$.

Определение 3. Пусть задано отображение $\varphi: \mathbb{R}^{nm+m} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ двух аргументов $y \in \mathbb{R}^{nm+m}$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через φ_y отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , которое получается из φ , путем фиксации аргумента y . Отображение φ является *устойчиво фейеровским* относительно точки $\bar{y} \in \mathbb{R}^{nm+m}$, если $\varphi_{\bar{y}} \in \mathbf{F}_{M_{\bar{y}}}$ и существует окрестность $V \subset \mathbb{R}^{nm+m}$ точки \bar{y} такая, что для любого $\tilde{y} \in V$ имеем $\varphi_{\tilde{y}} \in \mathbf{F}_{M_{\tilde{y}}}$.

Теорема 1. Пусть отображение $\varphi: \mathbb{R}^{m+m} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ двух аргументов $y \in \mathbb{R}^{m+m}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ является непрерывным по x и y . Пусть система $\bar{A}x \leq \bar{b}$, определяемая информационным вектором \bar{y} , является устойчиво совместной и $\varphi_{\bar{y}} \in \mathbf{F}_{M_{\bar{y}}}$. Тогда отображение φ является *устойчиво фейеровским* относительно точки $\bar{y} \in \mathbb{R}^{m+m}$. Доказательство теоремы 1 опирается на лемму 1.

Алгоритм \mathfrak{F} оказывается эффективным для задач небольшой размерности. Однако для больших задач ($n > 500$) время работы данного алгоритма может составлять сотни часов. В связи с этим в диссертационной работе был разработан новый масштабируемый алгоритм \mathfrak{S} построения псевдопроекции точки на многогранник с использованием фейеровских отображений, который допускает эффективное распараллеливание на большом количестве процессоров в системах с распределенной памятью. В основе масштабируемого алгоритма построения псевдопроекции на многогранник лежит метод разбиения пространства на подпространства. Для каждого подпространства организуется независимый фейеровский процесс. Через каждые s шагов результаты, полученные на подпространствах, соединяются в один вектор, который и является очередным приближением. Если расстояние между соседними приближениями меньше заданного положительного числа ε , то полученный вектор принимается в качестве псевдопроекции. В противном случае вычисления продолжаются.

Для произвольного линейного подпространства $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^n$ через $\pi_{\mathbb{P}}(x)$ обозначим ортогональную проекцию $x \in \mathbb{R}^n$ на линейное подпространство \mathbb{P} . Везде далее линейное подпространство будем называть просто подпространством. Через $\rho(\mathbb{P}, x) := \min_{p \in \mathbb{P}} \|p - x\|$ будем обозначать расстояние от точки x до подпространства \mathbb{P} . Пусть линейное многообразие \mathbb{L} получается из \mathbb{P} сдвигом на некоторый вектор z : $\mathbb{L} = \mathbb{P} + z$. Через $\pi_{\mathbb{L}}(x)$ обозначим ортогональную проекцию $x \in \mathbb{R}^n$ на линейное многообразие \mathbb{L} : $\pi_{\mathbb{L}}(x) = \pi_{\mathbb{P}}(x) + z$.

Алгоритм \mathfrak{S} . Пусть задано однозначное непрерывное M -фейеровское отображение $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$, M – выпукло и замкнуто. Зададим разбиение пространства \mathbb{R}^n в прямую сумму ортогональных подпространств: $\mathbb{R}^n = \mathbb{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{P}_r$, $\mathbb{P}_i \perp \mathbb{P}_j$ при $i \neq j$. Для каждого подпространства \mathbb{P}_i ($i = 1, \dots, r$) построим линейное многообразие \mathbb{L}_i следующим образом. Пусть $\bar{x}^i \in \text{Arg} \min_{x \in M} \rho(\mathbb{P}_i, x)$. Положим $\bar{z}^i = \pi_{\mathbb{P}_i^\perp}(\bar{x}^i) \in \mathbb{P}_i^\perp$. Здесь \mathbb{P}_i^\perp обозначает ортогональное дополнение к подпространству \mathbb{P}_i . Построим линейное многообразие \mathbb{L}_i путем сдвига подпространства \mathbb{P}_i на вектор \bar{z}^i :

$$\mathbb{L}_i = \mathbb{P}_i + \bar{z}^i. \quad (8)$$

Для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$ определим отображение $\varphi_i \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{L}_i\}$:

$$\varphi_i(x) = \pi_{\mathbb{L}_i}(\varphi(\pi_{\mathbb{L}_i}(x))). \quad (9)$$

Зафиксируем некоторое натуральное число s и положительное вещественное число ε . Положим $x_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

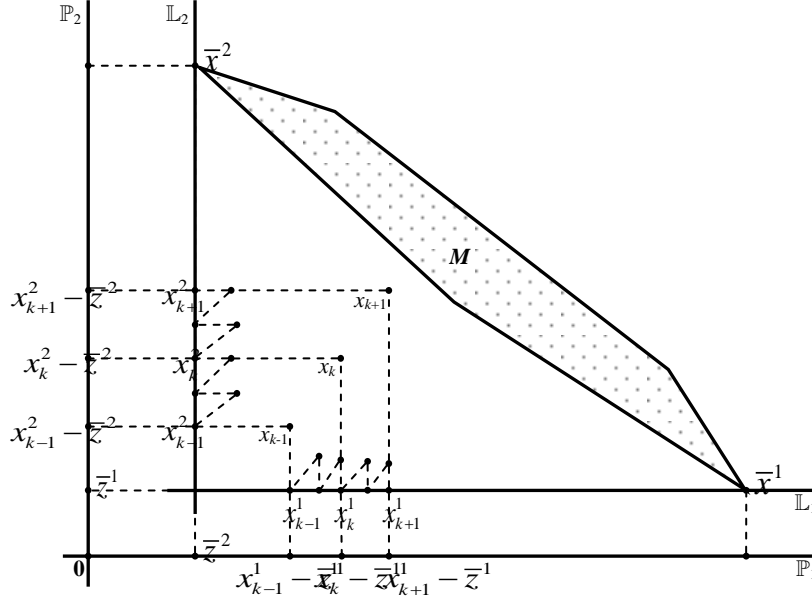


Рис. 1. Работа алгоритма \mathfrak{S} : $x_k^1 = \pi_{\mathbb{L}_1}(x_k)$, $x_{k+1}^1 = \varphi_1^s(x_k^1)$; $x_k^2 = \pi_{\mathbb{L}_2}(x_k)$, $x_{k+1}^2 = \varphi_2^s(x_k^2)$.

Алгоритм \mathfrak{S} состоит из следующих шагов:

Шаг 0. $k := 0$.

Шаг 1. $x_{k+1}^1 := \sum_{i=1}^r (\varphi_i^s(\pi_{\mathbb{L}_i}(x_k)) - \bar{z}^i)$.

Шаг 2. $k := k + 1$.

Шаг 3. Если $\|x_{k+1}^1 - x_k^1\| \geq \varepsilon$ & $d_M(x_{k+1}^1) \geq \varepsilon$, перейти на шаг 1.

Шаг 4. Стоп.

На шаге 3 алгоритма вычисляется функция *невязки* d_M , которая определяет степень близости точки x_{k+1}^1 к многограннику M .

$$d_M(x) = \sum_{j=1}^m \max \{ \langle a_j, x \rangle - b_j, 0 \}$$

Работа алгоритма \mathfrak{S} для размерности $n=2$ и $s=2$ схематично изображена на Рис. 1. Натуральное число s является важным параметром алгоритма \mathfrak{S} , влияющем на его масштабируемость. Увеличение s ведет к росту ресурса параллелизма, заложенного в алгоритме \mathfrak{S} . Однако, при выборе слишком большого значения для параметра s последовательность точек $\{x_k\}$, порождаемых алгоритмом \mathfrak{S} на шаге 1, может не попасть на многогранник. В этом случае выход из итерационного процесса произойдет из-за невыполнения условия $\|x_{k+1}^1 - x_k^1\| \geq \varepsilon$, входящего в критерий завершения. Если это произошло, необходимо уменьшить значение s и повторить вычислительный процесс.

Для того чтобы алгоритм \mathfrak{S} был корректным, необходимо и достаточно, чтобы последовательность точек $\{x_k\}$, порождаемых алгоритмом \mathfrak{S} на шаге 1, сходилась. Следующая теорема показывает, что каждое отображение $\varphi_i \in \{\mathbb{L}_i \rightarrow \mathbb{L}_i\}$, строящееся в алгоритме \mathfrak{S} , является фейеровским относительно множества $\mathbb{L}_i \cap M$.

Теорема 2. Пусть задано замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и однозначное M -фейеровское отображение $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$. Пусть \mathbb{P} – некоторое собственное линейное подпространство в пространстве \mathbb{R}^n , $\mathbb{T} = \mathbb{P}^\perp$ – ортогональное дополнение к подпростран-

ству \mathbb{P} . Пусть $\bar{x} \in \operatorname{Arg} \min_{x \in M} \rho(\mathbb{P}, x)$. Представим \bar{x} в виде суммы ортогональных векторов из подпространств \mathbb{P} и \mathbb{T} : $\bar{x} = \pi_{\mathbb{P}}(\bar{x}) + \pi_{\mathbb{T}}(\bar{x})$. Обозначим $\bar{z} = \pi_{\mathbb{T}}(\bar{x}) \in \mathbb{T}$. Построим линейное многообразие \mathbb{L} путем сдвига подпространства \mathbb{P} на вектор \bar{z} : $\mathbb{L} = \mathbb{P} + \bar{z}$. Определим отображение $\varphi_{\mathbb{L}} \in \{\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}\}$ следующим образом:

$$\varphi_{\mathbb{L}}(x) = \pi_{\mathbb{L}}(\varphi(\pi_{\mathbb{L}}(x))). \quad (10)$$

Положим

$$M_{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \cap M. \quad (11)$$

Тогда отображение $\varphi_{\mathbb{L}}$ является $M_{\mathbb{L}}$ -фейеровским.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $\{x_k\}$ – последовательность точек, порождаемых алгоритмом \mathfrak{S} на шаге 1:

$$x_{k+1} := \sum_{i=1}^r (\varphi_i^s(x_k) - \bar{z}^i); \quad k = 0, 1, \dots$$

В условиях алгоритма \mathfrak{S} определим $M_{\mathbb{L}_i} = \mathbb{L}_i \cap M$ ($i = 1, \dots, r$). Положим

$$x_0^i = \pi_{\mathbb{L}_i}(x_0), \quad x_{k+1}^i = \varphi_i(x_k^i).$$

Тогда

$$\varphi_i^s(x_k) = x_{s, (k+1)}^i, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Корректность алгоритма \mathfrak{S} обеспечивается следующей *теоремой сходимости*.

Теорема 3. Пусть $\{x_k\}$ – последовательность точек, порождаемых алгоритмом \mathfrak{S} на шаге 1:

$$x_{k+1} := \sum_{i=1}^r (\varphi_i^s(x_k) - \bar{z}^i); \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty} \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство теоремы 3 опирается на теорему 2 и лемму 2.

Третья глава, «Параллельные алгоритмы решения задачи сильной отделимости», посвящена вопросам параллелизации алгоритма \mathfrak{F} решения задачи сильной отделимости. Приводится описание параллельного алгоритма *Simple* вычисления псевдопроекции, основанного на распараллеливании независимых итераций цикла. Для алгоритма *Simple* строится информационный граф, показывающий, что не существует эффективной реализации этого алгоритма на многопроцессорных системах с распределенной памятью. Далее приводится описание оригинального параллельного алгоритма *Block* вычисления псевдопроекции, основанного на разбиении пространства на подпространства, в каждом из которых вычисляется независимый фейеровский процесс, а результат получается путем объединения координат предельных точек подпространств.

Сконструируем M -фейеровское отображение следующим образом. Представим систему линейных неравенств, задающих многогранник M , в следующем виде:

$$Ax \leq b: \langle a_j, x \rangle - b_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $a_j \neq 0$ для любого j . Тогда отображение вида

$$\varphi(x) = x - \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \frac{\max\{\langle a_j, x \rangle - b_j, 0\}}{\|a_j\|^2} \cdot a_j \quad (12)$$

будет однозначным непрерывным M -фейеровским отображением для любой системы положительных коэффициентов $\{\alpha_j > 0\}$, $j=1, \dots, m$, таких, что $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ и коэффициентов релаксации $0 < \lambda_j < 2$. Применим к (12) технику разбиения на подпространства. Пусть n – размерность пространства задачи (6). Пусть задано $r \in \mathbb{N}$: $r \leq n$. Для простоты мы будем считать, что r всегда кратно n : $n = r \cdot l$. Пусть задан ортонормированный базис пространства \mathbb{R}^n :

$$\{e_1, \dots, e_n\}. \quad (13)$$

Определим

$$\mathbb{P}_i = \text{Lin}(\{e_{1+(i-1)l}, \dots, e_{l+(i-1)l}\})$$

для $i=1, \dots, r$. Очевидно, что $\mathbb{P}_i \perp \mathbb{P}_j$ при $i \neq j$, и $\mathbb{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{P}_r = \mathbb{R}^n$. Пусть $\bar{x}^i \in \text{Arg min}_{x \in M} \rho(\mathbb{P}_i, x)$. Положим $\bar{z}^i = \pi_{\mathbb{P}_i^\perp}(\bar{x}^i) \in \mathbb{P}_i^\perp$ ($i=1, \dots, r$).

Для $i=1, \dots, r$ определим отображения $\tau_i \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l\}$ следующим образом. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, (x_1, \dots, x_n) – координаты вектора x в ортонормированном базисе (13). Тогда

$$\tau_i(x) = (x_{1+(i-1)l}, \dots, x_{l+(i-1)l}). \quad (14)$$

Обозначим $\bar{\tau}_i: \mathbb{P}_i \rightarrow \mathbb{R}^l$ – ограничение τ_i на подпространство $\mathbb{P}_i \subset \mathbb{R}^n$. Произвольный $x \in \mathbb{P}_i$ будет иметь в базисе (13) координаты $x = (0, \dots, 0, x_{1+(i-1)l}, \dots, x_{l+(i-1)l}, 0, \dots, 0)$. Сопоставляя это с (14), видим, что отображение $\bar{\tau}_i$ является взаимно-однозначным и для него существует обратное отображение $\bar{\tau}_i^{-1}$. В контексте формул (8) и (12) определим $\varphi_i \in \{\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{L}_i\}$ следующим образом:

$$\varphi_i(x) = \bar{\tau}_i^{-1} \left(\tau_i(x) - \sum_{j=1}^m \left(\alpha_j \lambda_j \frac{\max \{ \langle \tau_i(a_j), \tau_i(x) \rangle + \langle a_j, \bar{z}^i \rangle - b_j, 0 \}}{\|a_j\|^2} \cdot \tau_i(a_j) \right) \right). \quad (15)$$

Выполнение условий алгоритма \mathfrak{S} обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 4. Отображения φ_i ($i=1, \dots, r$), определяемые формулой (15), удовлетворяют тождеству (9).

В заключение дается оценка временной сложности алгоритма *Block*, показывающая, что параллельный алгоритм *Block* позволяет получить максимальное (теоретическое) ускорение в r раз, где r – количество подпространств, на которые разбивается исходное пространство.

В четвертой главе, «Программный комплекс и вычислительные эксперименты», описывается структура программного комплекса, реализующего методы и алгоритмы, предложенные в диссертационной работе. Данный программный комплекс может быть использован на кластерных вычислительных системах для решения задач сильной отделимости большой размерности в условиях быстро изменяющихся исходных данных.

Программный комплекс включает в себя следующие программы:

- Программа *Random* генерации случайных многогранников;
- Программа *Sequence*, реализующая последовательный алгоритм;
- Программа, реализующая параллельный алгоритм *Simple*;
- Программа, реализующая параллельный алгоритм *Block*.

Исходные тексты программ свободно доступны в Интернет по адресу <http://life.susu.ru/discr/>.

Программа *Random* реализует специальный алгоритм, генерирующий случайным образом две системы линейных неравенств, задающих два выпуклых непересекающихся многогранника произвольной размерности. Эта программа может быть использована для автоматической генерации задач произвольной размерности для тестирования различных алгоритмов решения задачи сильной отделимости.

Программа *Sequence*, реализует последовательную версию алгоритма \mathfrak{F} . При этом для построения псевдопроекции точки на многогранник могут использоваться фейеровские отображения двух типов. 1-й тип вычисляется по формуле (2), 2-й тип – по формуле (3). Номер типа отображения является параметром программы, задаваемым при ее запуске.

Программа *Simple* реализует простой параллельный алгоритм. В качестве технологии параллельного программирования была использована библиотека MPI. Параллельный алгоритм *Simple* использует хорошо известную технику распараллеливания независимых итераций цикла, вычисляющего сумму в формуле (2). Максимальная степень параллелизма в этом случае равна m . Подобный алгоритм может показывать хорошее ускорение на многопроцессорных системах с общей памятью. Однако в многопроцессорных системах с распределенной памятью пересылка данных может привести к большим накладным расходам.

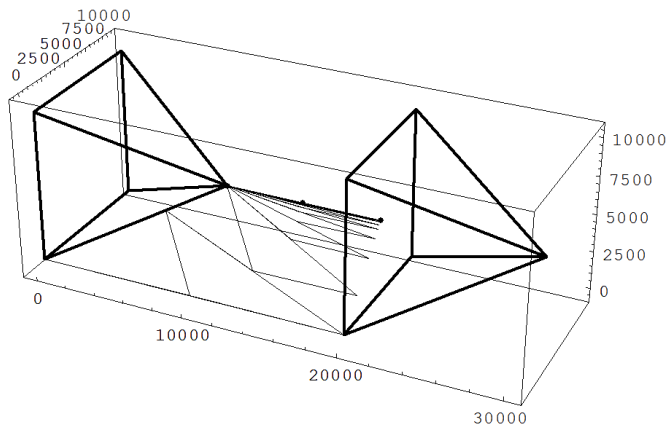
Программа *Block* реализует параллельный алгоритм. Параллельная структура программы организована по иерархическому принципу. Во главе иерархии стоит процесс «мастер», координирующий работу остальных процессов по выполнению алгоритма \mathfrak{F} . Процессу «мастер» подчиняются два независимых процесса-«бригадира». Первый процесс-«бригадир» вычисляет функцию $P_i_Phi_M$. Вторым процесс-«бригадир» вычисляет функцию $P_i_Psi_N$. Каждому процессу-«бригадиру» подчинено по r независимых процессов-«рабочих». «Бригадир» делит полученный от «мастера» вектор на подвекторы и передает их «рабочим». Каждый «рабочий» выполняет s фейеровских итераций в своем подпространстве и передает полученный подвектор «бригадиру», который объединяет подвекторы, пришедшие от различных «рабочих», в единый вектор. «Бригадир» проверяет критерий завершения итерационного процесса. Если он не выполнен, то «бригадир» снова делит вектор на подвекторы и передает их «рабочим». Если критерий завершения имеет место, то полученный вектор принимается в качестве приближения псевдопроекции на многогранник и передается «мастеру». «Мастер», получив обе псевдопроекции от «бригадиров», считает очередную среднюю точку и проверяет для нее критерий завершения. Если он не выполнен, то мастер передает среднюю точку каждому из «бригадиров» для продолжения вычислений.

Все указанные процессы оформляются как процессы MPI, которые могут запускаться на любом количестве процессоров (процессорных ядер), не превосходящем $(2r + 3)$. В предельном случае, когда каждое подпространство имеет размерность 1, имеем $r = n$. Т.е. максимальная масштабируемость алгоритма равняется $(2n + 3)$ процессоров, где n – размерность задачи.

Важным параметром реализации является количество независимых итераций s , выполняемых процессом-«рабочим». Увеличивая s , можно повышать вычислительную нагрузку на те процессоры, на которых выполняются процессы-«рабочие». Это позволяет оптимизировать затраты на пересылку сообщений между «рабочими» и «бригадирами».

На вычислительном кластере «СКИФ-Урал» были проведены вычислительные эксперименты на случайных задачах *Random* и модельных масштабируемых задачах *Model-n* (Рис. 2). Для модельных задач можно легко аналитически вычислить точное значение толщины максимального разделяющего слоя. Они хорошо подходят для проверки корректности алгоритма, исследования его масштабируемости, и дают хорошую возможность для подбора оптимальных значений параметров алгоритма.

| | |
|-------------------------|-------------------------|
| Многогранник M | Многогранник N |
| $x_1 - 2x_2 \leq 0$ | $x_1 - 2x_2 \leq 20000$ |
| ... | ... |
| $x_1 - 2x_n \leq 0$ | $x_1 - 2x_n \leq 20000$ |
| $x_1 + 2x_2 \leq 20000$ | $x_1 + 2x_2 \leq 40000$ |
| ... | ... |
| $x_1 + 2x_n \leq 20000$ | $x_1 + 2x_n \leq 40000$ |
| $-x_1 \leq 0$ | $-x_1 \leq -20000$ |
| $-x_2 \leq 0$ | $-x_2 \leq 0$ |
| ... | ... |
| $-x_n \leq 0$ | $-x_n \leq 0$ |



Итерации алгоритма \mathfrak{F} для задачи $Model-3$.

Рис. 2. Модельная задача $Model-n$.

С помощью программы *Sequence* была исследована последовательная реализация алгоритма \mathfrak{F} для фейеровских отображений двух типов на модельных задачах $Model-n$ (Рис. 3 и Рис. 4) и случайных задачах *Random* (Рис. 5, Рис. 6). Первый тип вычислялся по формуле (2), второй – по формуле (3). Эксперименты показали, что тип используемого фейеровского отображения может существенно влиять на скорость работы алгоритма.

Далее был исследован последовательный алгоритм *Simple*. На основе проведенных экспериментов (Рис. 7) можно сделать вывод, что алгоритм *Simple* может эффективно работать только на небольшом (до 16) количестве процессорных ядер.

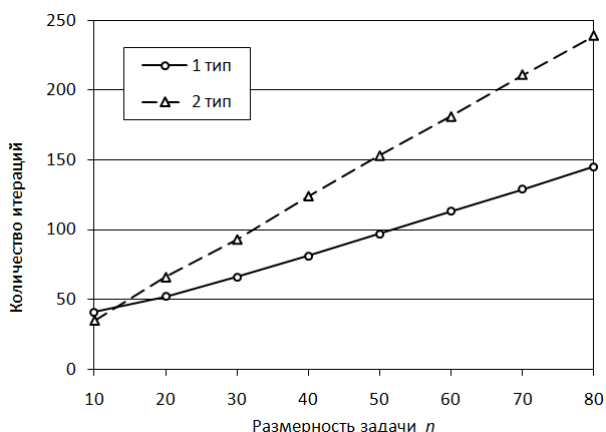


Рис. 3. Зависимость количества итераций от размерности n для $Model-n$.

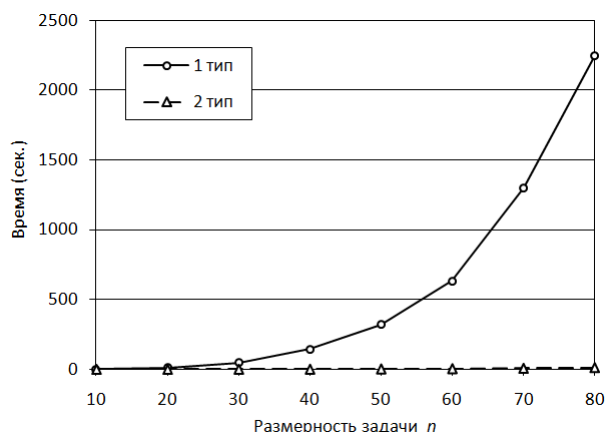


Рис. 4. Зависимость времени решения задачи $Model-n$ от размерности n .

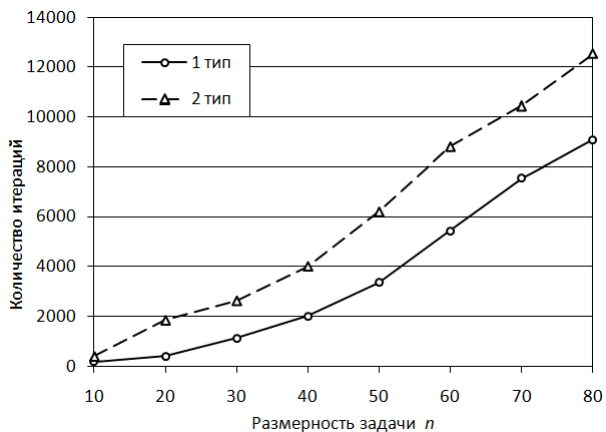


Рис. 5. Зависимость количества итераций от размерности n для *Random*.

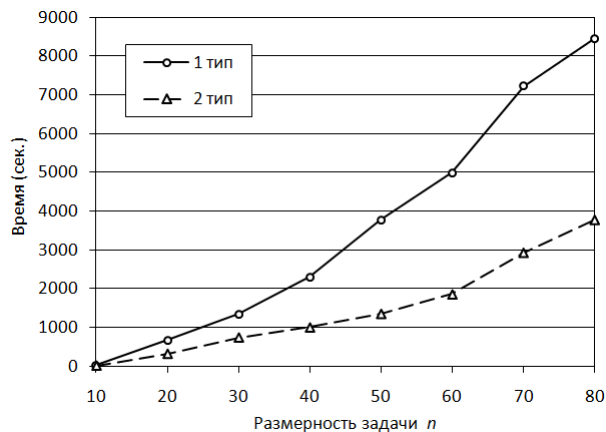


Рис. 6. Зависимость времени решения задач *Random* от размерности n .

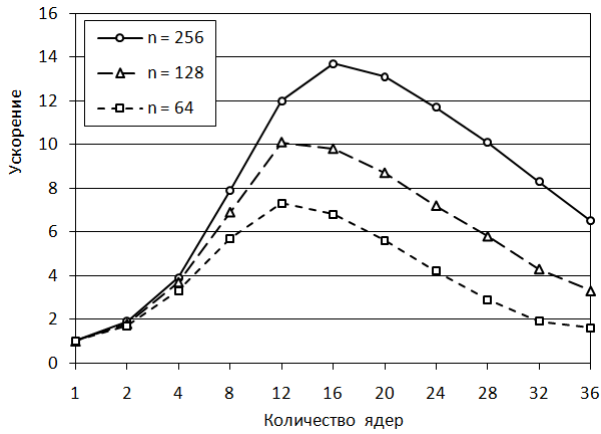


Рис. 7. Ускорение алгоритма *Simple* для задачи *Model-n*.

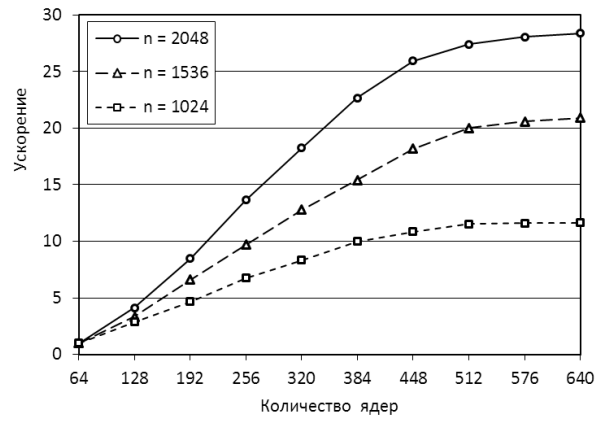


Рис. 8. Ускорение для задачи *Model-n*.

Также в вычислительных экспериментах был исследован параллельный алгоритм *Block*, разработанный в рамках настоящего диссертационного исследования. Были исследованы различные параметры алгоритма *Block* и даны рекомендации по выбору их значений. Проведено исследование ускорение параллельного алгоритма *Block* (Рис. 8). Ускорение вычислялось по формуле $\alpha = t_p / t_{64}$, где t_{64} – время, затраченное на решение задачи *Model-n* на 64 процессорных ядрах, t_p – время, затраченное на решение этой же задачи на p процессорных ядрах. Эксперименты проводились для трех размерностей: $n = 1024$, $n = 1536$ и $n = 2048$, при фиксированном $s = 10000$ и $r = p$. Для каждой размерности варьировалось количество процессорных ядер, используемых для решения задачи. Во всех трех случаях наблюдалось ускорение, близкое к линейному, вплоть до 512 процессорных ядер. Далее рост ускорения замедлялся. Однако при больших размерностях «загоризонтальвание» кривой ускорения происходило позже.

В заключении суммируются основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, приводятся данные о публикациях и апробациях автора по теме диссертации, и рассматриваются направления дальнейших исследований.

Основные результаты диссертационной работы

На защиту выносятся следующие новые научные результаты.

1. Разработан новый масштабируемый метод решения нестационарных задач сильной отделимости большой размерности. Для предложенного метода доказана теорема устойчивости.
2. Разработан параллельный итерационный алгоритм нахождения псевдопроекции точки на выпуклый многогранник, позволяющий эффективно решать задачи сильной отделимости на многопроцессорных системах с массовым параллелизмом. Для предложенного алгоритма доказана теорема сходимости.
3. Разработан и реализован программный комплекс для решения нестационарных задач сильной отделимости большой размерности на многопроцессорных системах с массовым параллелизмом, на базе которого проведены вычислительные эксперименты на модельных и случайных задачах, подтверждающие эффективность предложенных подходов.

Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

1. *Ершова А.В.* Алгоритм разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников с использованием фейеровских отображений // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 1(35). С. 53-56.
2. *Ершова А.В., Соколинская И.М.* Параллельный алгоритм решения задачи сильной отделимости на основе фейеровских отображений // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12, № 2. С. 178-189.
3. *Ершова А.В., Соколинская И.М.* О сходимости масштабируемого алгоритма построения псевдопроекции на выпуклое замкнутое множество // Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”. 2011. № 37(254), вып. 10. С. 12-21.
4. *Ершова А.В., Соколинская И.М.* Исследование устойчивости параллельного алгоритма решения задачи сильной отделимости на базе фейеровских отображений // Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”. 2012. № 18 (277), вып. 12. С. 5-12.

Другие публикации

5. *Ершова А.В.* Задача разделения двух выпуклых многогранников с использованием фейеровских отображений // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тезисы докладов Международной конференции (1–6 сентября 2008 г., г. Екатеринбург). Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2008. С. 274-275.
6. *Ершова А.В.* Метод решения задачи сильной отделимости для многопроцессорных систем с массовым параллелизмом // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ’2010): Труды международной научной конференции (29 марта – 2 апреля 2010 г., г. Уфа). Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. С. 660-661.
7. *Ершова А.В.* Алгоритм решения задачи сильной отделимости на базе фейеровских отображений // Тезисы докладов XVIII Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» (25 мая – 1 июня 2010 г., г. Новороссийск). Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2010. С. 131-132.
8. *Ершова А.В., Соколинская И.М.* Параллельный алгоритм разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников с использованием фейеровских отображений // Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи: Труды международной научной конференции (20–25 сентября 2010 г., г. Новороссийск). М.: Изд-во МГУ, 2010. С. 242-248.
9. *Ершова А.В.* Параллельный метод решения задачи сильной отделимости на базе фейеровских отображений // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. №12. Научное издание. (28 февраля – 4 марта 2011 г., г. Екатеринбург) Екатеринбург: УрО РАН, 2011. С. 85-86.
10. *Ершова А.В., Соколинская И.М.* Масштабируемый параллельный алгоритм построения псевдопроекции в задачах сильной отделимости // Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее: Труды международной научной конференции (19–24 сентября 2011 г., г. Новороссийск). М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 132-138.

Свидетельства о регистрации программ

11. *Ершова А.В.* Свидетельство Роспатента об официальной регистрации программы для ЭВМ "Последовательный алгоритм решения задачи разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников на базе фейеровских отображений" № 2010616104 от 16.09.2010.
12. *Ершова А.В.* Свидетельство Роспатента об официальной регистрации программы для ЭВМ "Генерация двух выпуклых непересекающихся многогранников" № 2010616105 от 16.09.2010.
13. *Ершова А.В.* Свидетельство Роспатента об официальной регистрации программы для ЭВМ "Параллельный алгоритм решения задачи разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников на базе фейеровских отображений" № 2011610980 от 26.01.2011.

Работа выполнялась при поддержке *Российского фонда фундаментальных исследований* (проекты 09-01-00546а и 12-01-00452а).

Подписано в печать «__» _____ 2012 г.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,2.
Тираж 100 экз.

Типография «Фотохудожник»
454111, г. Челябинск, ул. Свободы, 155/1